２０１１年度　駒澤大学経営学部　ゲーム理論 A
担当　上條良夫

◆第 1 回(5 月 10 日)：講義イントロダクション + 標準形ゲーム
まず，ゲーム理論の分析対象である，戦略的相互依存関係のある状況について，具体的な例を用いて説明した。次に，戦略的相互依存関係のある状況の一例である，同質の財を販売する隣接するお店の間で生じる価格競争について考察した。ゲーム理論による分析の重要なポイントとして，

1. 戦略的相互依存関係にある状況は行列形ゲームとして表現せよ
2. 支配される戦略は選ぶな

の二つを学んだ。これにより，両方のお店にとって財の価格を高価格に維持することが利益になるにもかかわらず，売上最大化を目指す行動の必然として，両店とも低価格を選択することになることがわかった。ここから得られる教訓は，「価格競争は企業を不幸にし，消費者を幸福にする」である。さらに，価格競争を避けるために企業の行う工夫（カルテルの形成，製品差別化，ブランドイメージの確立）について議論した。

◆第 2 回講義(5 月 17 日)：標準形ゲーム(囚人のジレンマ，不平等なじゃんけん、数当てゲーム)
まず、ゲーム２（りんごの収穫）を分析し、このゲームでプレイヤーたちが直面している状況は、ゲーム１（価格競争）と同一であることを確認した。ゲーム理論の有用性は、これらの例のように一見異なる話の裏側に、同一の利害構造が存在することを明らかにできることである。ちなみに、ゲーム１，２のような例は囚人のジレンマとして知られている。
ゲーム３では、自分の選択肢だけを観察しても何をとるべきかわからないようなときには、

- 相手の立場になって考えてみる（相手の利得に注目する）

ことが有用であることを学んだ。事実、このゲームでは、プレイヤー２は支配される戦略(L)を持ち、プレイヤー１はプレイヤー２の残された戦略(R)に対しての最適反応を選択することになる。
ゲーム４（不平等なじゃんけん）では、プレイヤー２はプレイヤー１よりも一見すると有利に思えるが、これは偽りの有利さであることを学んだ。事実、行列形ゲームで表現し、弱支配される戦略を消去することにより、このゲームでは二人はまったく互角な状況にいることがわかる。このゲームにおける重要なポイントは

- 弱支配される戦略はとらない

ということである。またこのゲームから得られる教訓は、「戦略的相互依存関係にある状況は、互いの利害を丁寧に紐解いてあげない限り、どちらが有利なのかはわからない」ということである。大雑把な推測で選択すると、痛い目をみるはめになりかねない（事実、教

室で質問した際には、見かけ上有利なプレイヤー２になるために、高額を支払う意思のある人が複数存在した)。
ゲーム５は、学生参加の数当てゲームである。数当てゲームのゲーム理論による解答はe-learning の確認テストから学ぶことができる。本日の教室実験の結果については次週発表する。
■読書案内
テキスト　第１章。第５章１，２節
山岸俊男、『社会的ジレンマ―「環境破壊」から「いじめ」まで』、php 新書

◆第 3 回講義（5 月 24 日）：ナッシュ均衡
まず前回講義の復習として、不平等なじゃんけんについて説明し、行列形ゲームを用いた分析によりプレイヤー１，２は互角な状況にいることを確認した。次に、前回講義で行った数当てゲームの結果について公表し、実験結果と理論予測が大きくずれていることを確認し、これより、ゲーム理論からの予測をどのように理解すればよいのかを説明した。
本日の講義の主題は、「最適反応」というアイデアから、これまで分析したゲームにおけるゲーム理論の解答について再考することである。その結果、ゲーム１（価格競争)、ゲーム３、ゲーム５（数当てゲーム）のゲーム理論からの解答はすべて、

- プレイヤーたちが互いに最適反応を取り合っている状態

であることが確認できた。実はこれこそ、ゲーム理論の中で最も知られた概念である、**ナッシュ均衡(Nash Equilibrium, NE)**の定義なのである。ゲーム理論が NE に注目するのは、NE は、「合理的意思決定者の行動調整の終着点」、と考えられるからである。NE においては、プレイヤーの誰もが自身の選択に対して後悔はしないし、それゆえそれ以上の戦略の変更は生じないと考えられる。

◆第 4 回講義（5 月 31 日）：ナッシュ均衡 2
まず、前回言葉により定義したナッシュ均衡の、数式を用いた厳密な定義を与えた。言葉による表現と数式による表現は、それぞれ一長一短はあるが、ゲーム理論がさまざまな分野に広く受け入れられた背景には、数式による曖昧性のない厳密な表現にあるので、ゲーム理論を学ぶ学生として、皆さんには数式表現に十分に慣れてほしいと思う。
ナッシュ均衡に到達すると考えられる説明として、以下の４つを挙げた。

- 支配される戦略の（逐次）消去
- 弱支配される戦略の（逐次）消去
- 決して最適反応とはならない戦略の（逐次）消去
- プレイヤーの試行錯誤の結果

このうち、三番目についてはこれまで触れてこなかったので、新たにゲーム７を用いて、この点を説明した。ゲーム７では、プレイヤー１のプレイヤー２の行動についてのいかなる予想に対しても最適反応とはならない戦略を消去することにより、ゲームを解くことが可能であることを確認した。
これまでのナッシュ均衡の導出には、（弱）支配される戦略の（逐次）消去や、決して最適反応にならない戦略の（逐次）消去のような、複雑な計算を必要とした。しかしながら、単にナッシュ均衡を発見するだけなら難しい計算は必要ではない。実際、行列形ゲームであれば、最適反応となる戦略に相当する利得に目印をつけることで、簡単にナッシュ均衡を発見できることを確認した。
最後に、ゲーム８（銀行の取付け）について考察した。ここでは、皆が「お金を預ける」ようなナッシュ均衡と、「お金を引き出す」ようなナッシュ均衡の二つが存在した。一般に、ナッシュ均衡が複数存在するときに重要になるのは、各プレイヤーが持っている相手プレイヤーの行動に対する予想である。プレイヤーたちは、過去の歴史や観察された事象を通じて相手プレイヤーの行動に対する予想を形成するので、どの均衡に到達するのかは歴史経路に依存することになる。また、良い均衡（ここでは、互いにお金を預ける状態）を導くには、全体に対するメッセージを発することが効果的であることを説明した。この点は囚人のジレンマと決定的に異なっている（なぜなら、囚人のジレンマでは、互いに協力するのはナッシュ均衡ではないから）。

◆第 5 回講義（6 月 7 日）：ナッシュ均衡 3
まず、前回扱った「銀行の取付け」を例にして、「予言の自己実現」として知られる現象について説明した。これは、ある人のある「予想」をもとにした最適反応が引き金となり、その「予想」が実際に実現されてしまうことを表している。銀行の取付けの例では、A 君が「この銀行は経営的に危ない」と（勝手な）予想を持ち、その予想に対しての最適反応としてお金を引き出すと、それを観察していた B 君に「この銀行は危ないのかもしれない」というメッセージを与えてしまい、その結果、B 君までもがお金を引き出してしまい、それを見ていた C さんがさらにお金を引き出してしまい、・・・、その結果、みんながお金を引き出してしまい、銀行は実際につぶれてしまう。かくして、A 君の予想は実現してしまうことになる。もちろん、これは極端な例であるが、このようなロジックは現実にもしばしば観察されている。最近の話では、東日本大震災後の都内におけるガソリン不足は、供給量が減少したというよりかは、「ガソリン不足になる」という予想を持った人々がガソリン購入に殺到し、それを見ていた他の人々もガソリン購入に殺到し、・・・、その結果、実際にガソリン不足になってしまったのではなかろうか。
次に、これまでの例とは異なり、戦略が無限に存在するようなゲームでのナッシュ均衡の導出方法について学んだ。ゲーム９（パートナーシップゲーム）では、二人のプレイヤー

が０以上４以下の実数を選択することになる。ナッシュ均衡を導出するのには、最適反応を求めることが重要であるが、プレイヤー１（２）の最適反応は、

- プレイヤー１（２）の利得を微分して 0 とおく

ことにより求められる。プレイヤー１，２の最適反応が求められれば、ナッシュ均衡は二つの最適反応の式を連立方程式として解くことにより計算することができる。
ゲーム１０（クールノー競争）では、同質的な財を生産する二企業が、同時に生産量を決定する。両企業は同じ財価格に直面しており、財の価格は生産量について減少関数である。このゲームのナッシュ均衡は、パートナーシップゲームと同じように求めることができる。つまり、それぞれの企業の利潤（利得）を微分して０とおき、最適反応を求める。次に、互いに最適反応となっているような生産量の組を求めるために、連立方程式を解く、である。
最後に、ゲーム９、１０でどのようにしてナッシュ均衡に到達するのかの例として、プレイヤーたちが交互に最適反応を取り合うような動的過程を考察した。その結果、両ゲームにおいて、最適反応を交互に取り合うことによりナッシュ均衡に近づいていくことが図から確認できた。
■読書案内
テキスト p52，53，p74~76

◆第６回講義（6 月 14 日）：混合戦略と混合戦略ナッシュ均衡の計算 1
ゲーム１１（じゃんけん）では、相手の「グー」に対しての BR は「パー」であり、「パー」に対しての BR は「チョキ」であり、「チョキ」に対しての BR は「グー」である、というように、最適反応が循環している。よって、今まで考えていた戦略の概念では NE は存在しないことになる。そこで、戦略の概念を、「グー」、「チョキ」、「パー」を確率的に選択する、というものへと修正することにする。このように修正された戦略のことを**混合戦略**とよび、これまで考えてきたような戦略のことを**純戦略**とよぶ。このような混合戦略を考えると、じゃんけんゲームには NE が存在することになる。実際、「グー」、「チョキ」、「パー」を確率 1/3 で選ぶという混合戦略（1/3，1/3，1/3）を互いに取り合う状態が混合戦略 NE であることを確認した。（ちなみに、混合戦略まで考えれば、非常に広いクラスで NE が存在することが知られている。）
次に、混合戦略と混合戦略 NE の数学的定義を与えた。ある混合戦略の組 $p = (p_1, ..., p_n)$ は以下の条件件を満たすとき、混合戦略 NE である。

- 任意の i に対して、彼の混合戦略 p_i は他の人たちの混合戦略の組 p_{-i} に対する BR になっている。

これよりわかるように、戦略が混合戦略になっているだけで、NE の要求は純戦略のときと変わっていない。

以下の性質は、混合戦略 NE を計算するのに大変有益である。

- 事実 1. i の混合戦略 p_i が他の人たちの混合戦略の組 p_{-i} に対する BR になっているのならば、p_i で正の確率で選ばれる任意の純戦略 s_i は、それ自体が p_{-i} に対する BR になっている。
- 事実 2. よって、そのような(p_i で正の確率で選ばれる、という意味) s_i の期待利得はすべて等しい。

この結果は、混合戦略 p_i での i の期待利得は、「正の確率で選ばれる純戦略の期待利得」の重みつき平均であり、それゆえ、混合戦略 p_i での期待利得は純戦略の期待利得の最大値と最小値の間にある、という事実から得られる。
ゲーム１２（ピッチャー対バッター）では、混合戦略 NE がどのように計算できるのかを学んだ。計算のためのトリックは

- プレイヤー１の混合戦略 NE における混合戦略（p, 1-p）を計算するには、プレイヤー２の利得に注目する

という点である。すでに説明した事実２より、もしプレイヤー２の混合戦略（q, 1-q）が（p, 1-p）に対する BR になっているのならば、($0 < q < 1$ が成り立つならば)プレイヤー２のフォークとストレートのときの期待利得は等しいはずである。この関係より、p の値は一意に定まってしまうのである。プレイヤー２の NE における混合戦略は、プレイヤー１の利得に注目することにより計算できる。
■読書案内
テキスト p48~51, p69~74

◆第７回講義（6 月 21 日）: 混合戦略と混合戦略ナッシュ均衡の計算 2 + 第一回小テスト
ゲーム１３（両性の争い）には、純戦略ナッシュ均衡に加えて，混合戦略ナッシュ均衡も存在する。プレイヤー１，２の最適反応曲線をそれぞれ導出し、二つの曲線の交点としてナッシュ均衡を求めることにより，純戦略ナッシュ均衡も混合戦略ナッシュ均衡も共通の方法で導出できることがわかった。

◆第８回講義（6 月 28 日）: 第一回小テスト解答 + 展開形ゲーム導入
今まで考えられてきた問題は基本的に，意思決定が同時になされる状況であった（この点を強調して，同時手盤ゲーム、とよばれることもある)。それに対して，これから学ぶのは，意思決定が順々になされることを許すような状況である（この点を強調して、逐次手盤ゲーム、とよばれることもある)。
意思決定が順々に行われる状況の最初の例として、ゲーム１４（信頼ゲーム）を考察した。まず状況を整理するために

- ゲームの木により表現する

ことが有用である。このゲームに対するゲーム理論の解答は

- 後ろから考える

ことにより求めることができる。ゲーム１５（最後通告ゲーム）でも、同じようにすればゲーム理論からの解答を求めることができた。

これらのゲームを実際に学生にプレイしてもらったところ，結果はかなりゲーム理論の解答から乖離していた。学生がゲーム理論を学ぶにつれて，あるいは当該意思決定状況に対する理解が深まるにつれて，このような乖離は縮小していくことが期待されるが，それでも完全になくなることはありえない。その理由は，現実の人間はしばしば（自己の利益を最大化しないという意味で）非合理的な選択をするからである。この非合理性は，たとえば，

- 我々は不平等な結果を回避する傾向がある，や
- 我々は、良い行動には良い行動を返し，悪い行動には悪い行動を返したいと思う（応報性）

などにより説明されることがおおい。これらは人間が広く一般的に有している特徴であり，それゆえ，これらを考慮した人間像から理論（ゲーム理論や経済学）を再構成する試みが近年なされている。この点はかなり発展的なので，講義では扱わない。興味があるが学生には，行動経済学，実験経済学，行動ゲーム理論，などのキーワードで文献を探してみることを勧める。

◆第９回講義（7 月 5 日）：展開形ゲーム（バックワードインダクションの応用）

前回の講義で扱ったような，それぞれのプレイヤーが何をするのかを後から順に考えていく，という思考方法は，バックワードインダクション（backward induction，後向き帰納法）として知られている。ゲーム１７（クーデターゲーム）では，意思決定者が長々と続くような例において，バックワードインダクションのような思考方法を我々が日常的に行うことがいかに難しいかが確認された。

意思決定を順々行う状況を分析できる展開形ゲームを用いれば，今まで同時意思決定として分析していた状況を意思決定が順々に行われるとして改めて分析することができる。このとき、先手になるのと後手になるののどちらが有利であるか、という問いが生じる。しかし、これに対する解答は，ゲームによる，というものである。たとえば，「じゃんけん」ゲームでは後手が有利であるが，「両性の争い」では先手が有利となるのである。

最後に、いわゆる遊戯としてのゲームもゲーム理論により分析できる例として「石取りゲーム」を考察した。結果は，石の数が４の倍数であれば後手必勝であり，それ以外のときには先手必勝になる，となる。このように，石取りゲームでは，どちらが勝つのかは実は

ゲームをやる前から完全に決まっており，これがゲームとしての性質を持つのは，参加者たちがこの事実に気がつかないか，必勝戦略を理解していないときだけである。実は，このような結論は，有限回の完全情報ゲーム（たとえば，○×，チェス，五目並べ）一般に成立する内容である。つまり，結果が，勝つか，負けるか，引き分け，のどれかであるような有限回完全情報ゲームは，必ず「先手必勝」か「後手必勝」か「うまくやっても引き分け」かである。

◆第 10 回講義（7 月 12 日）：展開形ゲーム（標準形表現と部分ゲーム完全均衡）

本日の講義ではまず，前々回にバックワードインダクションで分析した信頼ゲームと最後通告ゲームを標準形ゲームへと変換する手順を学んだ。変換の際のポイントは，展開形ゲームの戦略は

- ゲーム開始前に決めておく，各手番（正確には情報集合）で自分が選ぶ行動を記述する計画表である，

という点である。この定義にしたがえば，信頼ゲームは 2 × 2 の行列形ゲームとして，最後通告ゲームは 2 × 4 の行列形ゲームとして表現できる。

ひとたび展開形ゲームを標準形へと変換できれば，NE を求めることができる。信頼ゲームを標準形に変換したゲームの NE はもとの信頼ゲームをバックワードインダクションで解いた結果と一致しているのに対して，最後通告ゲームでは異なっていた。より正確にいえば，最後通告ゲームの NE には、バックワードインダクションによる予測以外に他のものが含まれていた。この他のものの中には、プレイヤー２の「根拠のない脅し（信憑性のない脅し)」をプレイヤー１が真に受けているものがあり、それゆえ NE の概念を展開形ゲームの特徴を利用して修正することにより，このような奇妙な NE を排除する必要が生ずる。そこで、部分ゲーム完全均衡を導入することとなる。

部分ゲーム完全均衡では、

- プレイヤーの戦略が記述する行動が，すべての部分ゲームでのナッシュ均衡と一致している

ことが要求される。部分ゲームとは、もとのゲームの一部分であり、ある一つの手番から始まり，それ自体を完結した展開形ゲームとみなせるものである。最後通告ゲームの部分ゲーム完全均衡を求めると，これはバックワードインダクションの結果と一致していることが確認できた。

最後に、情報集合について説明した。情報集合とは、

- 一つ以上の手番を含み
- 情報集合内に複数の手番が含まれる場合は、プレイヤーがそれらの手番の中のどこにいるのかが判断できないことを表す

ものである。このような情報集合を用いることにより、プレイヤーが意思決定の際にどの

ような情報を得ているのか、という点を明示的に扱えるのである。たとえば、プレイヤー１、２の順に意思決定するとしても、プレイヤー２が１の選択の内容がわからないような状況は、二人が同時に意思決定する状況と同一であると考えることができる。この意味で、展開形ゲームはすべての標準形ゲームを含んでいて、展開形ゲームを用いることにより、標準形ゲームでは分析できないようなより複雑な現象を説明することができるのである。