駒澤大学　ゲーム理論B
第4回

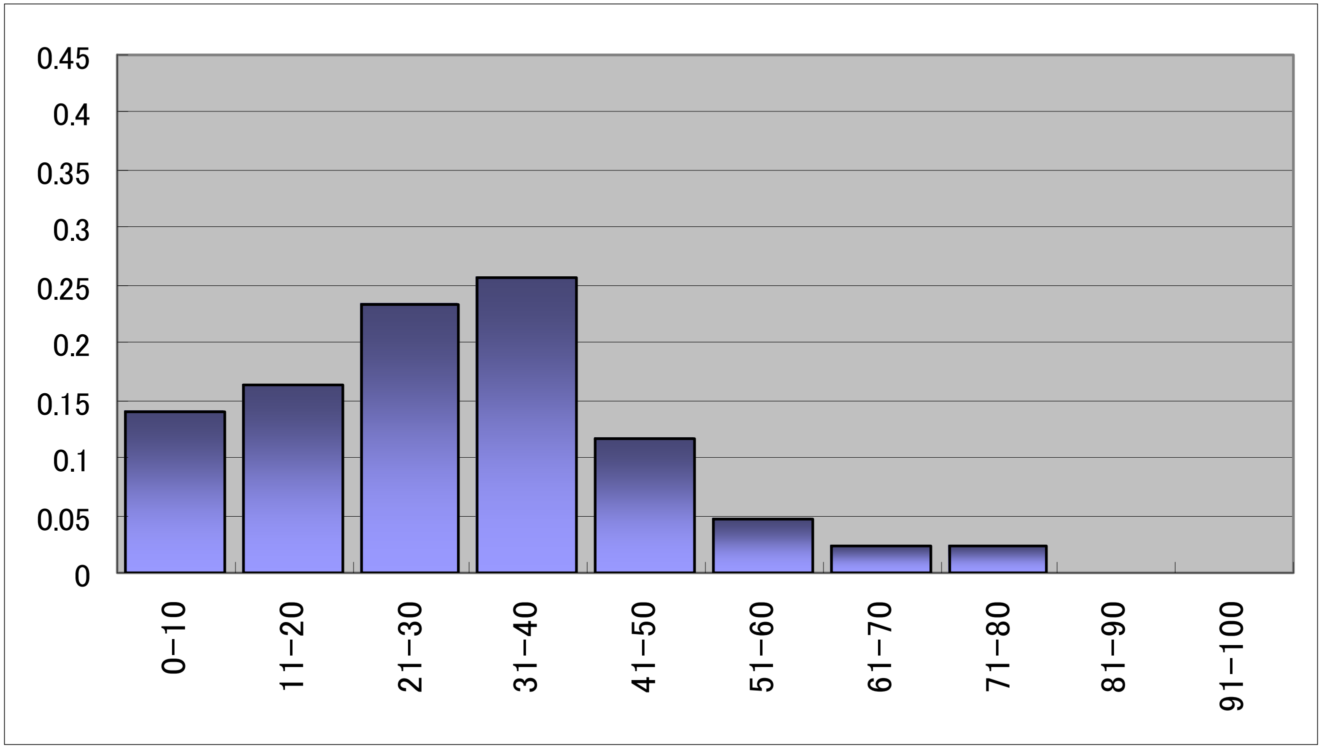
早稲田大学高等研究所
上條良夫

数当てゲーム（前回実施）

- 本日の講義出席者がプレイヤー。
- 出席カードの裏面に、0 ~ 100 の整数を一つだけ記入。
- 表明された全員の数字の平均値 * 0.6 が Winning Number。
- Winning Number に最も近い数字を表明した人が優勝。
- 優勝者の出席点は10点。
- 他の人は、出席点５点。

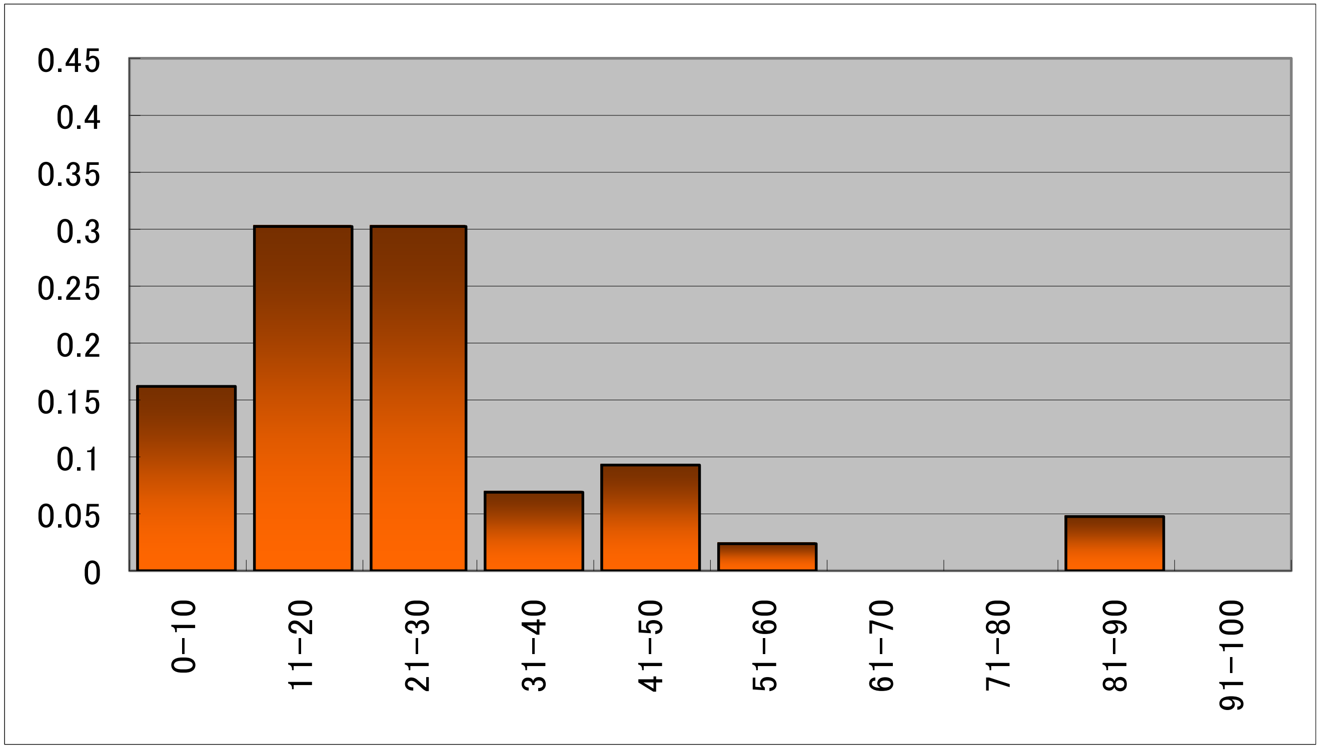
一回目（第二回講義）

- N=43, Ave.=30.6, Winning=18



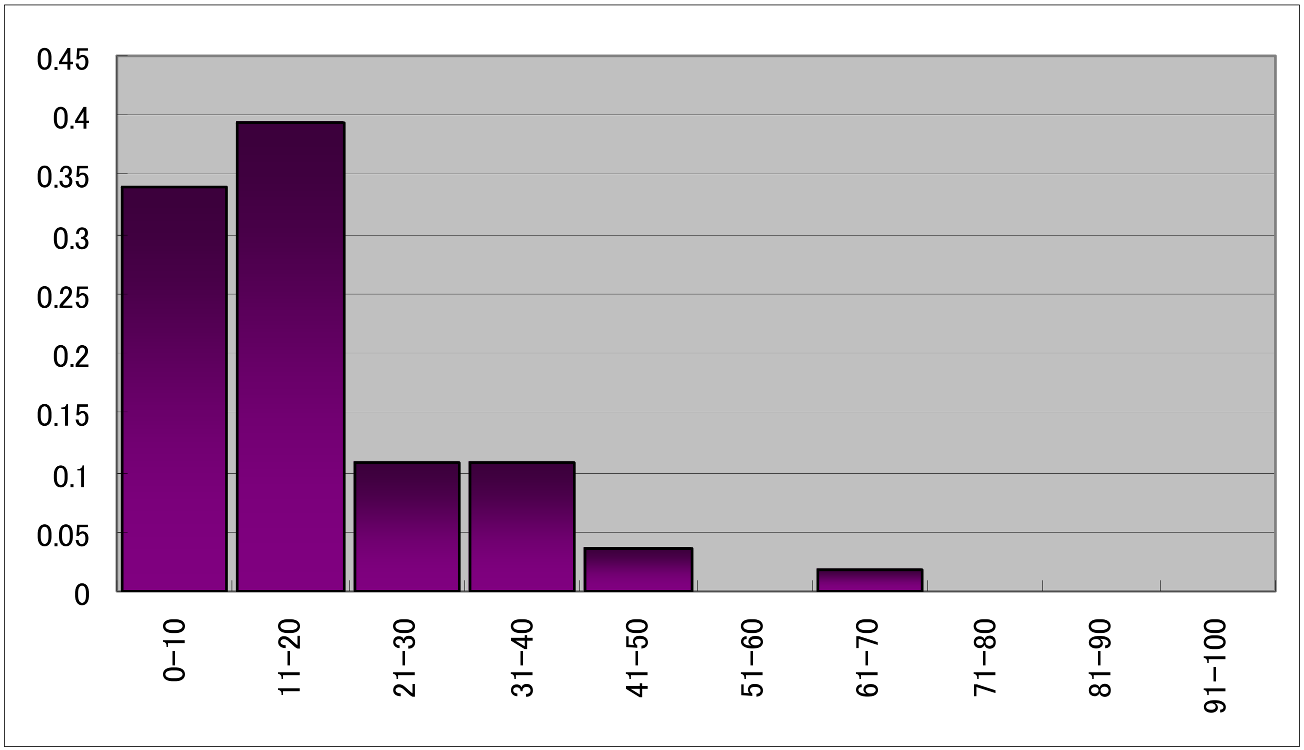
二回目（第二回講義）

- **N=43, Ave.=26.1, Winning=15**



三回目（第三回講義）

- N=57, Ave.=17.2, Winning=10



Winner. MG8052

講義予定

- 無限回繰り返しゲームでの利得の計算
- 無限回繰り返しゲームでの戦略
- フォーク定理

繰り返しゲーム

- 標準形ゲームでは、プレイヤーが同時に意思決定を行い、それぞれが利得を獲得し、それでゲームが終了するような状況を想定した。

- しかしながら、私達が日常的に行うようなゲーム的状況では、意思決定を一度行ったらそれで終わりというときはまれであり、似たようなゲーム的状況に繰り返し直面することのほうがむしろ多いだろう。

- このような同一のゲーム的状況に繰り返し直面する、というような状況も、展開形ゲームを用いることにより分析することが可能である。

- このように、同一の標準形ゲームを繰り返し行うようなゲームを、繰り返しゲームとよぶ。

- 繰り返しゲームは二種類に分類できる。
  - 有限回繰り返しゲーム
    - 条件付繰り返し
    - 無条件繰り返し
  - 無限回繰り返しゲーム

- Game 7.
  - 囚人のジレンマゲーム
  - C (cooperation)：協力
  - D (defection): 裏切り

	C	D
C	4, 4	1, 5
D	5, 1	2, 2

ナッシュ均衡は、(D、D)

無限回繰り返しゲーム

- 囚人のジレンマゲームを繰り返し行う状況を考えよう。
- 今度は、無限に囚人のジレンマゲームを繰り返すとする。
- 無限回繰り返しゲームで難しい点は、いかにして無限に生じる利得を評価するのか、という点。
- 例えば、囚人のジレンマゲームで無限に (C,C) が実現されるとすると、そのときの利得は
  - $4 + 4 + 4 + \ldots + 4 + \ldots = \infty$
- 無限に大小関係はつけられない。

- 利得の割引現在価値
  - 同じ利得でも、今日の利得は一年後の利得よりうれしい。（今日の1万円は一年後にもらえる1万円よりも、今日の時点で評価するとうれしい）
- 利得の割引因子を　δ　（0＜δ＜1）とする。
  - 今日の利得 1 を今日評価すると 1
  - 時期（明日、一年後）の利得1を今日評価すると

$$1 \times \delta = \delta$$

  - さらに時期（明後日、二年後）の利得1を今日評価すると

$$1 \times \delta \times \delta = \delta^2$$

- 今日利得1もらえ、時期にも利得1もらえ、さらに時期にも利得1もらえる状況を、今日評価すると

$$1 + \delta + \delta^2$$

- となる。

- 利得1を毎期もらえる状況を、今日評価すると

  $1+\delta+\delta^2+\delta^3+\delta^4+...$

- となる。

- これは、初項1、公比δの無限等比級数の和なので

$$1+\delta+\delta^2+\delta^3+...=???$$

$$a+a\delta+a\delta^2+a\delta^3+...=???$$

- 利得1を毎期もらえる状況を、今日評価すると

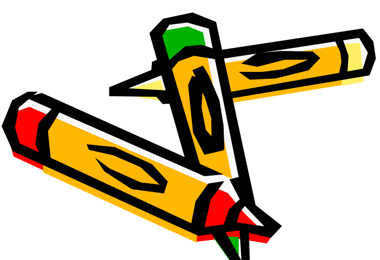
  1＋δ＋δ²＋δ³＋δ⁴＋．．．

- となる。

- これは、初項1、公比δの無限等比級数の和なので

$$1+\delta+\delta^2+\delta^3+\ldots=\frac{1}{1-\delta}$$

$$a+a\delta+a\delta^2+a\delta^3+\ldots=\frac{a}{1-\delta}$$



- 無限回繰り返しゲームの利得を考える際には、各回の標準形ゲームから得られる利得の割引現在価値により評価して、その和を考えることにする。

- 例えば、囚人のジレンマゲームの無限回繰り返しゲームでずっと (*C*,*C*) が実現すれば、利得の割引現在価値の和は

???

	C	D
C	4, 4	1, 5
D	5, 1	2, 2

- 無限回繰り返しゲームの利得を考える際には、各回の標準形ゲームから得られる利得の割引現在価値により評価して、その和を考えることにする。

- 例えば、囚人のジレンマゲームの無限回繰り返しゲームでずっと (C,C) が実現すれば、利得の割引現在価値の和は、

$$4+4\delta+4\delta^2+4\delta^3+\ldots=\frac{4}{1-\delta}$$

	C	D
C	4, 4	1, 5
D	5, 1	2, 2

- さて、以下では囚人のジレンマゲームを無限回繰り返す状況の部分ゲーム完全均衡を求める。
- しかし、有限回のときと違って、無限回繰り返しゲームの部分ゲーム完全均衡をすべて導出することは普通は出来ない。
- なので、これから、ある部分ゲーム完全均衡を求めることにする。
- 面白いことに、この部分ゲーム完全均衡では、有限回のときとはまったく異なる行動が生じることになる。
- 部分ゲーム完全均衡を求めるといったが、実際にこれからみせる方法は、ある意味のある戦略の組を考えて、これが実際に部分ゲーム完全均衡を構成することを示すことになる。

- では、無限回繰り返しゲームの戦略とはなんだろうか？
  - それは過去の出来事（過去の標準形ゲームの結果）を観察した上で、今日の行動を決定するような、完全な計画である。

- 例
  - ???

- では、無限回繰り返しゲームの戦略とはなんだろうか？
  - それは過去の出来事（過去の標準形ゲームの結果）を観察した上で、今日の行動を決定するような、完全な計画である。

- 例
  - 常に C をとる。（All C）
  - 常に D をとる。(All D)
  - 奇数回にはC をとり、偶数回には D をとる。
  - 過去に相手が裏切ったことがある場合には D をとり、それ以外では C をとる。(永久懲罰、Trigger)

- 以下では、次のような Trigger 戦略の亜種を考えて、δがある範囲内にあるときには、両者がこの戦略をとっている状態が部分ゲーム完全均衡であり、さらに均衡パスでは常に (C,C) が達成されていることを示す。

- Trigger’戦略
  - 第一回目には C をとる。
  - 第二回目以降では、過去に自分か相手かが D をとったことがある場合には D を選び、それ以外では C を選ぶ。

- Trigger’戦略を互いに取り合っている状態が部分ゲーム完全均衡であることを示す。

- ケース1： 過去に自分か相手かのどちらかがＤをとっているような部分ゲーム。

  – このとき、相手は必ず今後ずっとＤを取り続けることになる。
  – よって、自分もＤを取り続けることが最適反応である。
  – つまり、Trigger’戦略に従うことが、自分にとって最適である。

ケース2: 過去に自分も相手もDをとったことがないような部分ゲーム。

- このとき、自分が Trigger’ 戦略に従えば、(今期からみた)利得の割引現在価値の和は

- では、今期の行動を D にするとして、利得の割引現在価値の和を最も高くするような戦略はどんなものか

- それは、今期からずっと D を取り続けることである。というのも、今期 D をとってしまうと、来期以降は相手は必ずDをとってくるので。

ケース2： 過去に自分も相手もDをとったことがないような部分ゲーム。

- このとき、自分が Trigger’ 戦略に従えば、（今期からみた）利得の割引現在価値の和は

$$4+4\delta+4\delta^2+4\delta^3+\ldots=\frac{4}{1-\delta}$$

- では、**今期の行動を D にするとして**、利得の割引現在価値の和を最も高くするような戦略はどんなものか

- それは、今期からずっと D を取り続けることである。というのも、今期 D をとってしまうと、来期以降は相手は必ずDをとってくるので。

– 今期以降ずっと D を取り続けたときの、利得の割引現在価値の和は

- さて、以上より、戦略を Trigger' から常に D に切り替えるインセンティブが存在しないためには、

– 今期以降ずっと D を取り続けたときの、利得の割引現在価値の和は

$$5+2\delta+2\delta^2+2\delta^3+\ldots=5+\frac{2\delta}{1-\delta}$$

- さて、以上より、戦略を Trigger' から常に D に切り替えるインセンティブが存在しないためには、

$$\frac{4}{1-\delta}\geq 5+\frac{2\delta}{1-\delta}\Leftrightarrow 4\geq 5(1-\delta)+2\delta\Leftrightarrow \boxed{\delta\geq\frac{1}{3}}$$

- さて、つまり、δ>=1/3 であれば、過去に自分も相手もDをとったことがないような部分ゲームにおいて、戦略をTrigger' から今期 D を取るようないかなる戦略にも変更する誘引は無い。

- 実は、この点だけチェックすれば、過去に自分も相手もDをとったことがないような部分ゲームにおいて、Trigger' からいかなる戦略にも変更する誘引が存在しないことを示したことになるのである。

- というのも、当該部分ゲームにおいて、Trigger' からある戦略に変更する誘引が存在するのならば、それは今期か次期か、あるいはどこかで D を選択することを意味するはず。それを仮に t 期とするのならば、この t 期から始まる部分ゲームは、過去に自分も相手もDをとったことがないような部分ゲームに相当している。しかし、すでに示したとおり、t 期に D を選択するような戦略で、Trigger' よりも高い利得を与えるものは存在しないのである。

- よって、$\delta >= 1/3$ であれば、互いに Trigger' を取り合っているような状態は、部分ゲーム完全均衡である。

- さらに、Trigger' の定義より、均衡パスでは (C,C), (C,C), … を無限に繰り返すことになる。

- このように、無限回繰り返しゲームでは、有限回のときとは異なる部分ゲーム完全均衡が存在している。

- この結果は、囚人のジレンマ状態にあっても、それを繰り返し状況として認識することにより、ジレンマにおかれた当人間の力で協力状態を実現可能であることを示唆している。

- 以上の結果は、実は、囚人のジレンマゲームに限らず、他のすべての標準形ゲームの無限回繰り返しゲームで成立している結果の一例である。

- 大雑把に言えば、標準形ゲームを無限回繰り返すことにより、もとの標準形ゲームのナッシュ均衡利得以上の利得を平均して実現することが可能であり、さらに割引因子が 1 に十分近ければ、いかなるパレート最適かつ個人合理的な利得を達成することが可能である。

- このような結果は、ゲーム理論の世界では、古くから民間伝承のように伝わってたものなので、フォーク(Folk)定理とよばれている。

連絡事項

- 11月9日は授業アンケートを実施する
- 次回は「無限回繰り返しゲーム」の続きを行う。