駒澤大学　ゲーム理論B
第12,13回

早稲田大学高等研究所
上條良夫

講義内容

- 第12回と13回講義で、マッチング理論を扱う。

- マッチング理論に対するゲーム理論の貢献は大きく、一部の成果は現実に応用されており、今後もその応用範囲が広がることが期待されている。

ゲーム理論の役割の変化

- 現象を説明する理論から、**(社会的)問題を解決するための道具**へ

- 利益の相反する経済主体（人、企業、国家）たちに、
  - **誰に何を (効率性の問題)**
  - **いくらで (収入と平等性の問題)**
- 与えるのか、を決定する制度を分析し、有効な制度を提案する。

- **オークション**・・・少数の財を多数の需要者の一部に割り当てる仕組み
  - 効率性の問題。財を高く評価する人に財を与えたい
  - 収入の問題。売り手は期待できる収入を高くしたい
  - 例。周波数オークション。インターネットオークション
- **マッチング問題**・・・人と人（学校、企業、業務）を割り当てる問題
  - 効率性の問題。好き合っている人同士をマッチさせたい
  - 安定性の問題。事後的に不満がでないようなマッチングを実現させたい
  - 例。学校選択。研修医の病院への割り当て。

マッチング問題

- 二部門、一対一のマッチング問題
- 男性(学生)の集合 M = {a,b,c …}
- 女性(学校)の集合 W={A,B,C,…}
- 男性は女性に対して選好を持ち、女性は男性に対して選考を持つ。
- 選好関係は ＞ を用いて次のように表される。
- 例（M={a,b,c}, W={A,B,C} のケース）
  - 男性 a : B ＞ C ＞ A　　　女性A: b ＞ a ＞ c
  - 男性 b : B ＞ A ＞ C　　　女性B: c ＞ b ＞ a
  - 男性 c : C ＞ B ＞ A　　　女性C: a ＞ c ＞ b

- 男性の集合、女性の集合、それぞれの選好関係を踏まえた上で、どのように**男性一人**を**女性一人**を対応させるのか（**マッチング**）を考えるのが、**マッチング問題**。

- 何が難しいのか

- 例 (M={a,b,c}, W={A,B,C} のケース)
  - 男性 a : B ＞ C ＞ A　　女性A: b ＞ a ＞ c
  - 男性 b : B ＞ A ＞ C　　女性B: c ＞ b ＞ a
  - 男性 c : C ＞ B ＞ A　　女性C: a ＞ c ＞ b

- 男性 a と b は共に女性 B を一番好んでいる。
- しかし、女性 B と対応づけられる(マッチする、結婚する)のは1名だけ
- つまり、**全員の要望を完全に適えることは不可能**である。

マッチングの表現方法

- 例（M={a,b,c}, W={A,B,C} のケース）
  - 男性 a : B ＞ C ＞ A　　女性A: b ＞ a ＞ c
  - 男性 b : B ＞ A ＞ C　　女性B: c ＞ b ＞ a
  - 男性 c : C ＞ B ＞ A　　女性C: a ＞ c ＞ b

- (1) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ A & B & C \end{pmatrix}$

- (2) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ C & A & B \end{pmatrix}$

- この問題では、全部で**6(=3! = 3 * 2 * 1)**種類のマッチングが存在

安定マッチング

- 望ましいマッチングの一つであり、マッチング問題に直面した政策立案者は、いかにして「**安定マッチングを実現させるのか**」が課題である。

- 安定マッチングとは、個人レベルの努力で、これ以上マッチングの改善が起こりえないような状態をさす。つまり、ひとたび安定マッチングが生じれば、それ以上マッチング内容に変化が起きない。

- あるマッチングが安定マッチングであるとは、以下のような男女のペア(男性i と女性 j) が存在しないことを指す。
  (1) 男性 i は女性 j を現在のマッチングで割り当てられた女性よりも好み
  (2) 女性 j は男性 i を現在のマッチングで割り当てられた男性よりも好む。

- 逆に、(1), (2) を満たすような男女がいると、二人は駆け落ちしてしまうので、もともとのマッチングは壊されてしまう。

- 安定マッチング = 駆け落ちが起きないマッチング

- 例（M={a,b,c}, W={A,B,C} のケース）
  - 男性 a : B ＞ C ＞ A　　　女性A: b ＞ a ＞ c
  - 男性 b : B ＞ A ＞ C　　　女性B: c ＞ b ＞ a
  - 男性 c : C ＞ B ＞ A　　　女性C: a ＞ c ＞ b

- (1) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ A & B & C \end{pmatrix}$

- (2) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ C & A & B \end{pmatrix}$

- (1), (2) はそれぞれ安定マッチングかどうかチェックせよ。

政策立案者の悩み

- 安定マッチングを目指すべきゴールであるとして、そもそも
- 安定マッチングは常に存在しているのか
- 安定マッチングを簡単に求める方法はあるのか
- という課題が残る。

Gale = Shapley アルゴリズム
（男性プロポーズのケース）

- Step 1. 各男性は、自分にとって最も望ましい女性にプロポーズをする。
  - 各女性は、プロポーズされた男性のリストを作成し、その中で最も好ましい男性を**保留**とし、それ以外の男性からのプロポーズを拒否する。
  - もし、プロポーズを拒否された男性がいなければ Step 3 へ。
- Step 2. 保留中のプロポーズのない男性は、まだプロポーズを拒否されていない女性の中で、最も好ましい女性にプロポーズする。
  - 各女性は、保留中の男性とプロポーズされた男性からなるリストを作成し、その中で最も好ましい男性を**保留**とし、それ以外の男性からのプロポーズを拒否する。
  - もし、プロポーズを拒否された男性がいなければ、または、拒否された男性にもうこれ以上プロポーズをする相手がいない場合は Step 3 へ。**そうでない場合は Step 2 を繰り返す。**

Gale = Shapley アルゴリズム
（男性プロポーズのケース）

- Step 3. 現在保留中のプロポーズがある女性は、**保留中のプロポーズを受諾し、結婚する**。
  - 保留中のプロポーズがない女性は独身
  - すべてのプロポーズを拒否された男性も独身

- このアルゴリズムを走らせることにより、**必ずある一つのマッチング**が出来上がる。

- 女性プロポーズのケースでは、男女の役割を入れ替えることにより、同じように定義できる。

例題1

- 例 (M={a,b,c}, W={A,B,C} のケース)
  - 男性 a : B ＞ C ＞ A　　　　女性A: b ＞ a ＞ c
  - 男性 b : B ＞ A ＞ C　　　　女性B: c ＞ b ＞ a
  - 男性 c : C ＞ B ＞ A　　　　女性C: a ＞ c ＞ b

- において、Gale=Shapley アルゴリズム(男性がプロポーズするケースと女性がプロポーズするケース) により得られるマッチングを求めなさい。

例題2

- 例（M={a,b,c}, W={A,B} のケース）
  - 男性 a : B ＞ A　　　女性A: b ＞ a ＞ c
  - 男性 b : B ＞ A　　　女性B: c ＞ b ＞ a
  - 男性 c : A ＞ B　　　女性C: a ＞ c ＞ b

- において、Gale=Shapley アルゴリズム(男性がプロポーズするケースと女性がプロポーズするケース）により得られるマッチングを求めなさい。

重要な事実
Gale=Shapley アルゴリズムは
必ず安定マッチングを返す

- 証明。男性プロポーズのケースを考える。
- まず、任意の男性 i の駆け落ちのお誘いは必ず女性に断られることを示す。
- アルゴリズムの返した i のマッチング相手を女性 j とする。
- 駆け落ちの候補として女性 k さんを選ぶ。この k さんは、当然 i 君にとって j さんよりも素敵な女性である。つまり (i: k > j)
- k さんのマッチング相手を男性 h とする。
- すると、k さんの選好関係は必ず、
  - （1）
- である。なぜなら、アルゴリズムの定義より
- （2）
- つまり、必ず i 君の駆け落ちの誘いは断られる。

- 証明。男性プロポーズのケースを考える。
- **まず、任意の男性ｉの駆け落ちのお誘いは必ず女性に断られることを示す。**
- アルゴリズムの返したｉのマッチング相手を女性ｊとする。
- 駆け落ちの候補として女性ｋさんを選ぶ。このｋさんは、当然ｉ君にとってｊさんよりも素敵な女性である。つまり(i: k ＞ j)
- ｋさんのマッチング相手を男性ｈとする。
- すると、ｋさんの選好関係は必ず、
  - ｋ : h ＞ i
- である。なぜなら、アルゴリズムの定義より
- ｉ君はすでに一度ｋにプロポーズをしていて、そのプロポーズをｋは断っているからである。

- つまり、必ずｉ君の駆け落ちの誘いは断られる。

- 証明の続き
- 次に、任意の女性 j の駆け落ちのお誘いは必ず男性に断られることを示す。
- アルゴリズムの返した j のマッチング相手を男性 i とする。
- 駆け落ちの候補として男性 h を選ぶ。この h 君は、当然 j さんにとって i 君よりも素敵な男性である。つまり (j: h > i)
- h 君のマッチング相手を女性 k とする。
- すると、h 君の選好関係は必ず、
  - (3)
- である。なぜなら、アルゴリズムの定義より
- (4)
- つまり、必ず j さんの駆け落ちの誘いは断られる。

- 証明の続き
- 次に、任意の女性ｊの駆け落ちのお誘いは必ず男性に断られることを示す。
- アルゴリズムの返したｊのマッチング相手を男性ｉとする。
- 駆け落ちの候補として男性ｈを選ぶ。このｈ君は、当然ｊさんにとってｉ君よりも素敵な男性である。つまり(j: h ＞ i)
- ｈ君のマッチング相手を女性ｋとする。
- すると、ｈ君の選好関係は必ず、
  - h : k ＞ j
- である。なぜなら、アルゴリズムの定義より
- ｈ君はｊさんにプロポーズをする前にｋさんにプロポーズをしたからである。

- つまり、必ずｊさんの駆け落ちの誘いは断られる。