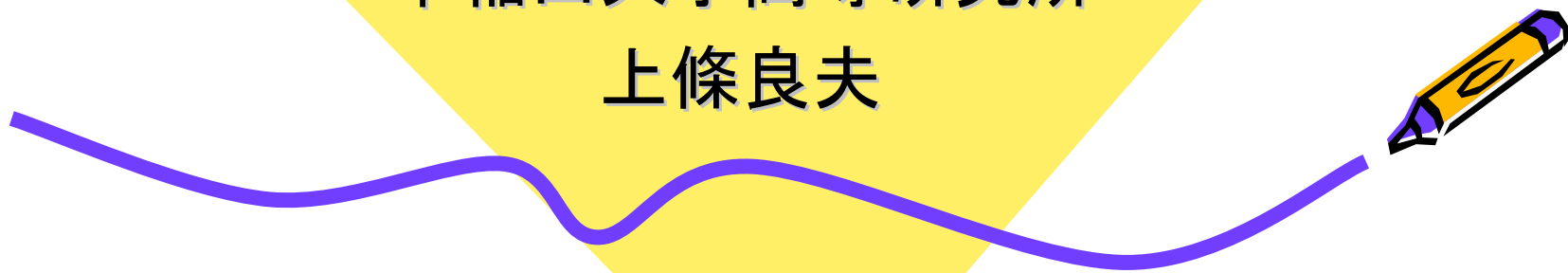


駒澤大学 ゲーム理論B
第12,13回

早稲田大学高等研究所
上條良夫



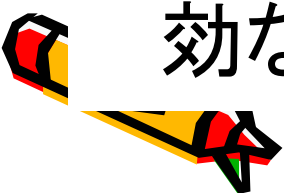
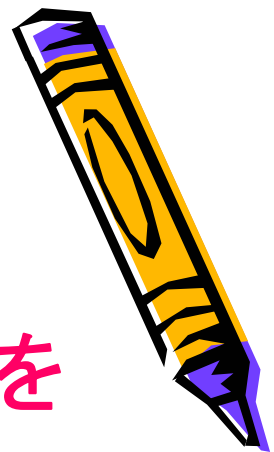
講義内容

- 第12回と13回講義で、**マッチング理論**を扱う。
- マッチング理論に対する**ゲーム理論の貢献は大きく、一部の成果は現実に応用されており、今後もその応用範囲が広がる**ことが期待されている。



ゲーム理論の役割の変化

- 現象を説明する理論から、**(社会的)問題を解決するための道具**へ
- 利益の相反する経済主体(人、企業、国家)たちに、
 - 誰に何を **(効率性の問題)**
 - いくらで **(収入と平等性の問題)**
- 与えるのか、を決定する制度を分析し、有効な制度を提案する。



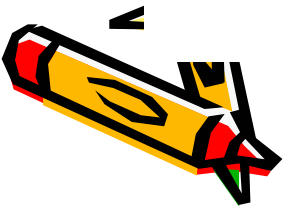


- **オークション**・・・少数の財を多数の需要者の一部に割り当てる仕組み
 - － 効率性の問題。財を高く評価する人に財を与えたい
 - － 収入の問題。売り手は期待できる収入を高くしたい
 - － 例。周波数オークション。インターネットオークション
- **マッチング問題**・・・人と人(学校、企業、業務)を割り当てる問題
 - － 効率性の問題。好き合っている人同士をマッチさせたい
 - － 安定性の問題。事後的に不満がでないようなマッチングを実現させたい
 - － 例。学校選択。研修医の病院への割り当て。



マッチング問題

- 二部門、一対一のマッチング問題
- 男性(学生)の集合 $M = \{a, b, c \dots\}$
- 女性(学校)の集合 $W = \{A, B, C, \dots\}$
- 男性は女性に対して選好を持ち、女性は男性に対して選考を持つ。
- 選好関係は $>$ を用いて次のように表される。
- 例 ($M = \{a, b, c\}$, $W = \{A, B, C\}$ のケース)
 - 男性 a : $B > C > A$ 女性 A : $b > a > c$
 - 男性 b : $B > A > C$ 女性 B : $c > b > a$
 - 男性 c : $C > B > A$ 女性 C : $a > c > b$





- 男性の集合、女性の集合、それぞれの選好関係を踏まえた上で、どのように**男性一人を女性一人**を対応させるのか(**マッチング**)を考えるのが、**マッチング問題**。

・ 何が難しいのか

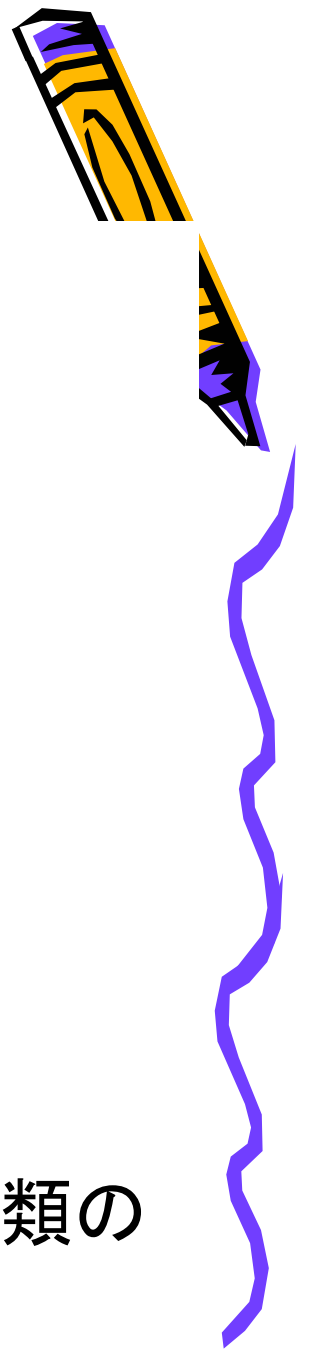
・ 例 ($M=\{a,b,c\}$, $W=\{A,B,C\}$ のケース)

- 男性 a : $B > C > A$ 女性 A : $b > a > c$
- 男性 b : $B > A > C$ 女性 B : $c > b > a$
- 男性 c : $C > B > A$ 女性 C : $a > c > b$

- ・ 男性 a と b は共に女性 B を一番好んでいる。
- ・ しかし、女性 B と対応づけられる(マッチする、結婚する)のは1名だけ
- ・ つまり、**全員の要望を完全に適えることは不可能**である。



マッチングの表現方法



・ 例 ($M=\{a,b,c\}$, $W=\{A,B,C\}$ のケース)

- 男性 a : $B > C > A$ 女性A: $b > a > c$
- 男性 b : $B > A > C$ 女性B: $c > b > a$
- 男性 c : $C > B > A$ 女性C: $a > c > b$

• (1)
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ A & B & C \end{pmatrix}$$

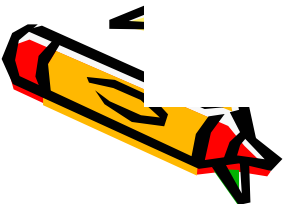
• (2)
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ C & A & B \end{pmatrix}$$

• この問題では、全部で**6(=3! = 3 * 2 * 1)**種類の
マッチングが存在



安定マッチング

- 望ましいマッチングの一つであり、マッチング問題に直面した政策立案者は、いかにして「**安定マッチングを実現させるのか**」が課題である。
- 安定マッチングとは、個人レベルの努力で、これ以上マッチングの改善が起こりえないような状態をさす。つまり、ひとたび安定マッチングが生じれば、それ以上マッチング内容に変化が起きない。





- あるマッチングが**安定マッチング**であるとは、以下のような**男女のペア(男性 i と女性 j)**が存在しないことを指す。

(1) 男性 i は女性 j を現在のマッチングで割り当てられた女性よりも好み

(2) 女性 j は男性 i を現在のマッチングで割り当てられた男性よりも好む。

- 逆に、(1), (2) を満たすような男女がいると、二人は駆け落ちしてしまうので、もともとのマッチングは壊されてしまう。



- **安定マッチング = 駆け落ちが起きないマッチング**



• 例 ($M=\{a,b,c\}$, $W=\{A,B,C\}$ のケース)

- 男性 a : $B > C > A$ 女性 A : $b > a > c$
- 男性 b : $B > A > C$ 女性 B : $c > b > a$
- 男性 c : $C > B > A$ 女性 C : $a > c > b$

• (1)
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ A & B & C \end{pmatrix}$$

• (2)
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ C & A & B \end{pmatrix}$$

- (1), (2) はそれぞれ安定マッチングかどうかチェックせよ。

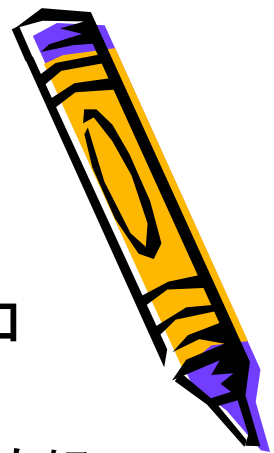
政策立案者の悩み

- 安定マッチングを目指すべきゴールであるとして、そもそも
- 安定マッチングは常に存在しているのか
- 安定マッチングを簡単に求める方法はあるのか
- という課題が残る。



Gale = Shapley アルゴリズム

(男性プロポーズのケース)

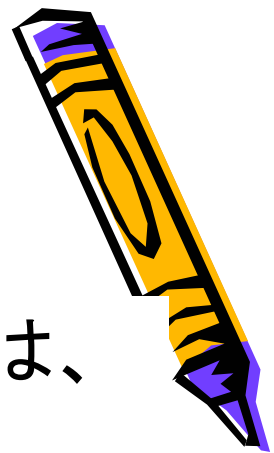


- Step 1. 各男性は、自分にとって最も望ましい女性にプロポーズをする。
 - 各女性は、プロポーズされた男性のリストを作成し、その中で最も好ましい男性を**保留**とし、それ以外の男性からのプロポーズを拒否する。
 - もし、プロポーズを拒否された男性がいなければ Step 3 へ。
- Step 2. 保留中のプロポーズのない男性は、まだプロポーズを拒否されていない女性の中で、最も好ましい女性にプロポーズする。
 - 各女性は、保留中の男性とプロポーズされた男性からなるリストを作成し、その中で最も好ましい男性を**保留**とし、それ以外の男性からのプロポーズを拒否する。
 - もし、プロポーズを拒否された男性がいなければ、または、拒否された男性にもうこれ以上プロポーズをする相手がない場合は Step 3 へ。**そうでない場合は Step 2 を繰り返す。**



Gale = Shapley アルゴリズム

(男性プロポーズのケース)



- Step 3. 現在保留中のプロポーズがある女性は、**保留中のプロポーズを受諾し、結婚する。**
 - 保留中のプロポーズがない女性は独身
 - すべてのプロポーズを拒否された男性も独身
- このアルゴリズムを走らせることにより、**必ずある一つのマッチング**が出来上がる。
- 女性プロポーズのケースでは、男女の役割を入れ替えることにより、同じように定義できる。



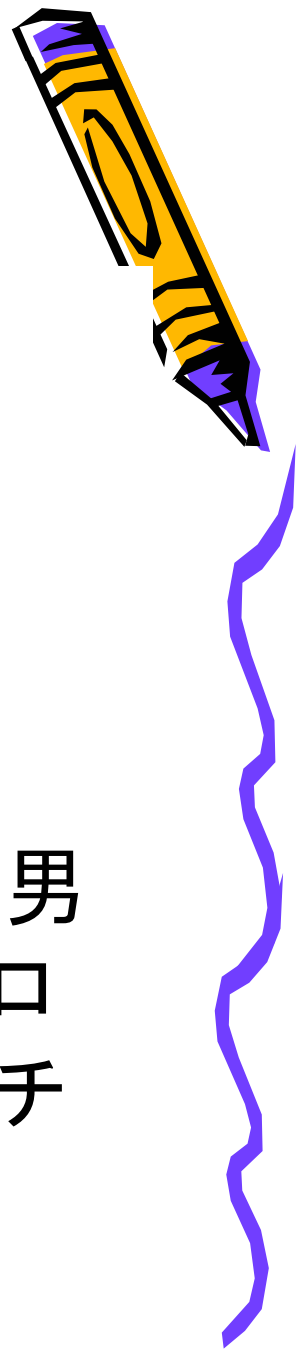
例題1



- 例 ($M=\{a,b,c\}$, $W=\{A,B,C\}$ のケース)
 - 男性 a : $B > C > A$ 女性A: $b > a > c$
 - 男性 b : $B > A > C$ 女性B: $c > b > a$
 - 男性 c : $C > B > A$ 女性C: $a > c > b$
- において、Gale-Shapley アルゴリズム(男性がプロポーズするケースと女性がプロポーズするケース)により得られるマッチングを求めなさい。



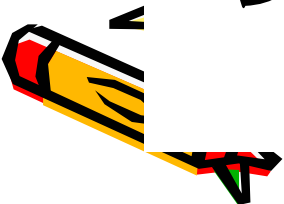
例題2



・ 例 ($M=\{a,b,c\}$, $W=\{A,B\}$ のケース)

- | | |
|--------------------|------------------|
| - 男性 a : $B > A$ | 女性A: $b > a > c$ |
| - 男性 b : $B > A$ | 女性B: $c > b > a$ |
| - 男性 c : $A > B$ | 女性C: $a > c > b$ |

・ において、Gale-Shapley アルゴリズム(男性がプロポーズするケースと女性がプロポーズするケース)により得られるマッチングを求めなさい。

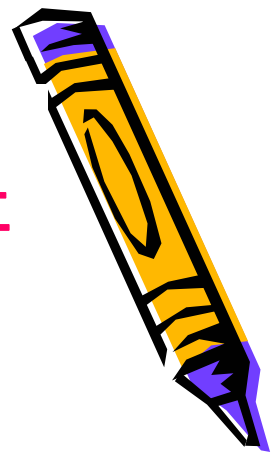




重要な事実

Gale=Shapley アルゴリズムは
必ず安定マッチングを返す





- 証明。男性プロポーズのケースを考える。
 - **まず、任意の男性 i の駆け落ちのお誘いは必ず女性に断られることを示す。**
 - アルゴリズムの返した i のマッチング相手を女性 j とする。
 - 駆け落ちの候補として女性 k さんを選ぶ。この k さんは、当然 i 君にとって j さんよりも素敵なお女性である。つまり ($i: k > j$)
 - k さんのマッチング相手を男性 h とする。
 - すると、 k さんの選好関係は必ず、
 - (1)
 - である。なぜなら、アルゴリズムの定義より
 - (2)
- つまり、必ず i 君の駆け落ちのお誘いは断られる。





- 証明。男性プロポーズのケースを考える。
- **まず、任意の男性 i の駆け落ちのお誘いは必ず女性に断られることを示す。**
- アルゴリズムの返した i のマッチング相手を女性 j とする。
- 駆け落ちの候補として女性 k さんを選ぶ。この k さんは、当然 i 君にとって j さんよりも素敵なお女性である。つまり ($i: k > j$)
- k さんのマッチング相手を男性 h とする。
- すると、 k さんの選好関係は必ず、
 - $k: h > i$
- である。なぜなら、アルゴリズムの定義より
- i 君はすでに一度 k にプロポーズをしていて、そのプロポーズを k は断っているからである。
- つまり、必ず i 君の駆け落ちのお誘いは断られる。





- 証明の続き
 - 次に、任意の女性 j の駆け落ちのお誘いは必ず男性に断られることを示す。
 - アルゴリズムの返した j のマッチング相手を男性 i とする。
 - 駆け落ちの候補として男性 h を選ぶ。この h 君は、当然 j さんにとって i 君よりも素敵で素敵な男性である。つまり $(j: h > i)$
 - h 君のマッチング相手を女性 k とする。
 - すると、 h 君の選好関係は必ず、
 - (3)
 - である。なぜなら、アルゴリズムの定義より
 - (4)
- つまり、必ず j さんの駆け落ちの誘いは断られる。





- 証明の続き
- 次に、任意の女性 j の駆け落ちのお誘いは必ず男性に断られることを示す。
- アルゴリズムの返した j のマッチング相手を男性 i とする。
- 駆け落ちの候補として男性 h を選ぶ。この h 君は、当然 j さんにとって i 君よりも素敵で男性である。つまり $(j: h > i)$
- h 君のマッチング相手を女性 k とする。
- すると、 h 君の選好関係は必ず、
 - $h: k > j$
- である。なぜなら、アルゴリズムの定義より
- h 君は j さんにプロポーズをする前に k さんにプロポーズをしたからである。
- つまり、必ず j さんの駆け落ちの誘いは断られる。

