問題３　プレイヤー 1, 2 がある財を購入したいと考えている。プレイヤー 1, 2 の財の評価額はそれぞれ v1 = 100, v2 = 90 である。プレイヤー i が財を価格 p で購入すると，そのときの利得は vi - p であり，財を購入できなかったプレイヤーの利得は 0 である.

封印入札第二価格オークションで財を販売する状況を考える.
つまり，各プレイヤーは同時に入札額を表明し，より高い金額を表明したプレイヤーにもう一人が表明した金額で財は売却される。仮に，二人の入札額が同じ場合には，半々の確率で財を購入する人が決まり，その人が表明した金額で財を購入する。

以下では，話を単純化するために，プレイヤー 1 の戦略集合は { 80, 100, 120 }，プレイヤー 2 の戦略集合は { 70, 90, 110 } とする.

- (1)解答欄の利得行列に利得を記入せよ。
- (2)純粋戦略ナッシュ均衡をすべて求めよ。
- (3)各プレイヤーにとって，自分の評価値を入札するということは，どのような戦略であるか答えよ。

	70	90	110
80			
100			
120			

- プレイヤー１が 80,
  プレイヤー２が 70,
  を入札すると、プレイヤー１が財を購入する。
- 支払価格は 70 である。

- よって、プレイヤー１の利得は
- 100-70＝30
- プレイヤー２の利得は0である。

(1) の解答

(1) の解答

	70	90	110
80	30, 0		
100			
120			

- プレイヤー１が 80,
  プレイヤー２が 90,
  を入札すると、プレイヤー２が財を購入する。
- 支払価格は 80 である。

- よって、プレイヤー2 の利得は
- 90-80＝10
- プレイヤー1の利得は0 である。

	70	90	110
80	30, 0	0, 10	
100			
120			

- プレイヤー１が 80, プレイヤー２が 110, を入札すると、プレイヤー２が財を購入する。
- 支払価格は 80 である。
- よって、プレイヤー2 の利得は
- 90-80＝10
- プレイヤー1の利得は0 である。

(1) の解答

(1) の解答

	70	90	110
80	30, 0	0, 10	0,10
100			
120			

- プレイヤー１が 100, プレイヤー２が 70, を入札すると、プレイヤー１が財を購入する。
- 支払価格は 70 である。

- よって、プレイヤー1 の利得は
- 100-70＝30
- プレイヤー2の利得は0 である。

	70	90	110
80	30, 0	0, 10	0,10
100	30,0		
120			

- プレイヤー１が 100, プレイヤー２が 90, を入札すると、プレイヤー１が財を購入する。
- 支払価格は 90 である。

- よって、プレイヤー1の利得は
- 100-90＝10
- プレイヤー2の利得は0である。

(1) の解答

	70	90	110
80	30, 0	0, 10	0,10
100	30,0	10,0	
120			

- プレイヤー１が 100, プレイヤー２が 110, を入札すると、プレイヤー2が財を購入する。
- 支払価格は 100 である。

- よって、プレイヤー2の利得は
- 90-100=-10
- プレイヤー1の利得は0である。

(1) の解答

(1) の解答

	70	90	110
80	30, 0	0, 10	0,10
100	30,0	10,0	0,-10
120			

- プレイヤー１が 120, プレイヤー２が 70, を入札すると、プレイヤー1が財を購入する。
- 支払価格は 70 である。

- よって、プレイヤー1の利得は
- 100-70=30
- プレイヤー2の利得は0である。

	70	90	110
80	30, 0	0, 10	0,10
100	30,0	10,0	0,-10
120	30,0		

- プレイヤー１が 120,
  プレイヤー２が 90,
  を入札すると、プレイヤー1が財を購入する。
- 支払価格は 90 である。

- よって、プレイヤー1の利得は
- 100-90=10
- プレイヤー2の利得は0である。

(1) の解答

	70	90	110
80	30, 0	0, 10	0,10
100	30,0	10,0	0,-10
120	30,0	10,0	

- プレイヤー１が 120, プレイヤー２が 110, を入札すると、プレイヤー1が財を購入する。
- 支払価格は 110 である。
- よって、プレイヤー1の利得は
- 100-110=-10
- プレイヤー2の利得は0である。

(1) の解答

(1) の解答

- 以上より、左のような利得行列を得る。

	70	90	110
80	30, 0	0, 10	0,10
100	30,0	10,0	0,-10
120	30,0	10,0	-10,0

	70	90	110
80	30, 0	0, 10	0, 10
100	30, 0	10, 0	0, -10
120	30, 0	10, 0	-10, 0

- プレイヤー１の、プレイヤー２の戦略70, 90, 110 に対する最適反応に印 をつける。
- プレイヤー２の、プレイヤー１の戦略80, 90, 120 に対する最適反応に印 をつける。
- よってナッシュ均衡は、

(80, 110), (100,70), (100,90),(120,70), (120,90)

の五つである。

(2) の解答

	70	90	110
80	30, 0	0, 10	0, 10
100	30, 0	10, 0	0, -10
120	30, 0	10, 0	-10, 0

- 左の利得行列より、プレイヤー１の戦略100は、いつでも戦略 80, 120 と同程度以上の利得を与える。
- さらに、プレイヤー２が戦略90をとったときには、プレイヤー１の戦略 100 は戦略 80 よりも高い利得を与える。
- プレイヤー２が戦略110 をとったときには、プレイヤー１の戦略 100 は戦略 120 よりも高い利得を与える。
- 以上より、戦略 100 はプレイヤー１の**弱支配戦略**である。

(3) の解答

	70	90	110
80	30, 0	0, 10	0, 10
100	30, 0	10, 0	0, -10
120	30, 0	10, 0	-10, 0

- 同様にすれば、プレイヤー２についても、戦略 90 が弱支配戦略であることを確認できる。

(3) の解答

問題４　逆需要関数が P ＝ 10 - Q で表されるような市場において（Pは価格、Qは生産量），企業１，企業２がクールノー競争を行っている状況を考える.
企業１は生産１単位当たり１の費用がかかり、企業２は生産１単位あたり２の費用をかかるとする.
このとき以下の問いに答えなさい.

- (1)企業１の生産量を q1、企業２の生産量を q2 として、企業１、２の利潤を q1，q2 を用いて表しなさい。

- (2)企業１、２ともに利潤を最大化するように行動すると仮定する。クールノーナッシュ均衡における企業１、企業２の生産量を求めなさい。

- 企業1が q1 単位の財を生産し、企業２が q2 単位の財を生産しているとき、市場全体での財の生産量は Q=q1+q2 である。
- よって、財一単位の価格は、P=10-q1-q2 となる。

- 企業１の利潤は、

$$\pi_1(q_1, q_2) = (10 - q_1 - q_2)q_1 - q_1$$

- 企業２の利潤は、

$$\pi_2(q_1, q_2) = (10 - q_1 - q_2)q_2 - 2q_2$$

(1) の解答

- 企業1の最適反応を導出する。

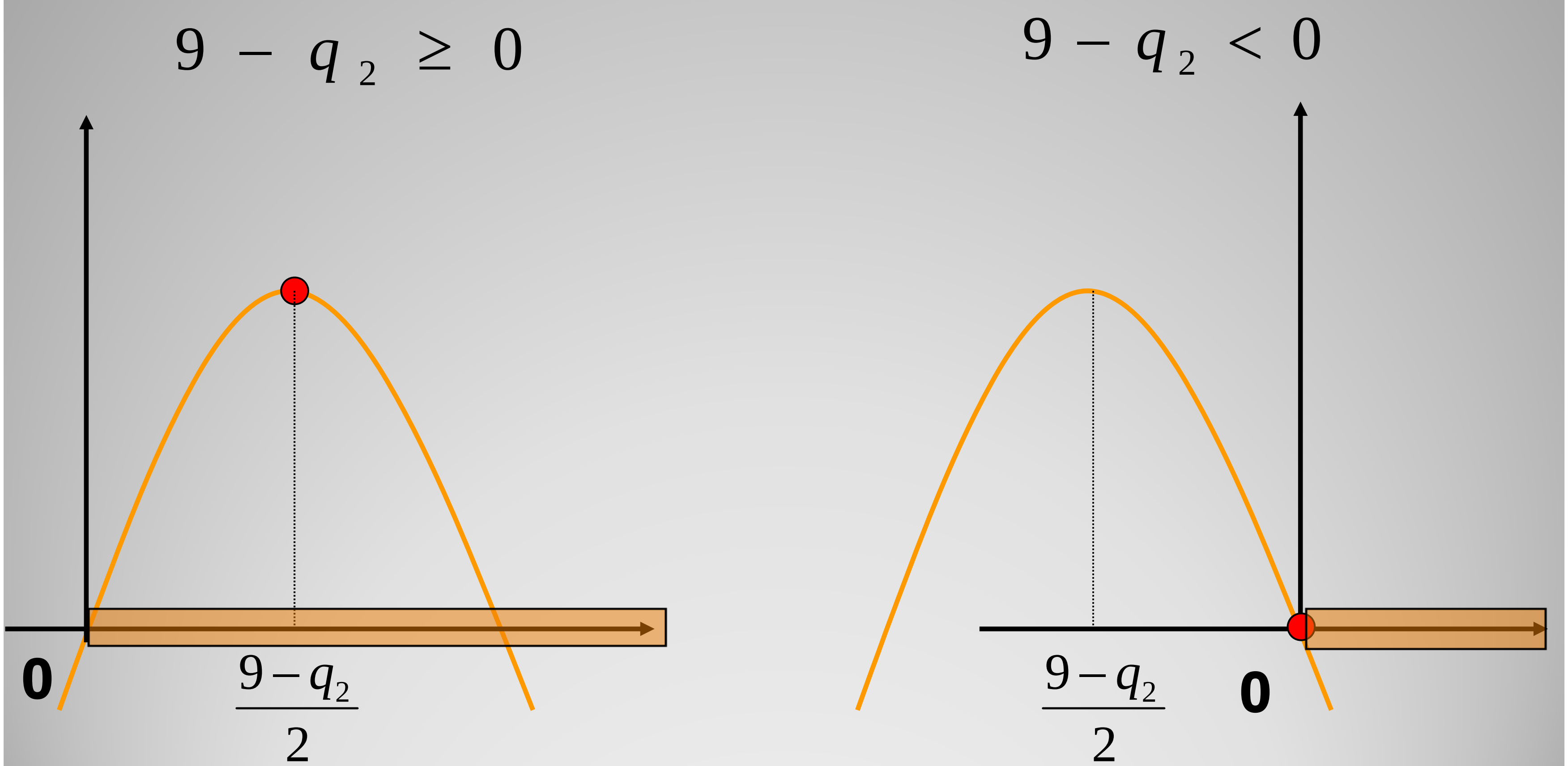
$$\pi_1(q_1, q_2) = (10 - q_1 - q_2)q_1 - q_1$$
$$= -(q_1)^2 + (10 - 1 - q_2)q_1$$
$$= -\left(q_1 - \frac{9 - q_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{9 - q_2}{2}\right)^2$$

- 企業１の利潤は、q1 に関して上に凸な放物線であり、最大値は、q1 が0以上であるという条件を無視すれば

$$q_1 = \frac{9 - q_2}{2}$$

- で与えられる。

(2) の解答



(2) の解答

- 企業1の最適反応（反応関数）は、

$$q_1 = \begin{cases} \dfrac{9-q_2}{2} & 9 \geq q_2 \\ 0 & 9 < q_2 \end{cases}$$

(2) の解答

- 企業2の最適反応を導出する。

$$\pi_2(q_1, q_2) = (10 - q_1 - q_2)q_2 - 2q_2$$
$$= -(q_2)^2 + (10 - 2 - q_1)q_2$$
$$= -\left(q_2 - \frac{8 - q_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{8 - q_1}{2}\right)^2$$

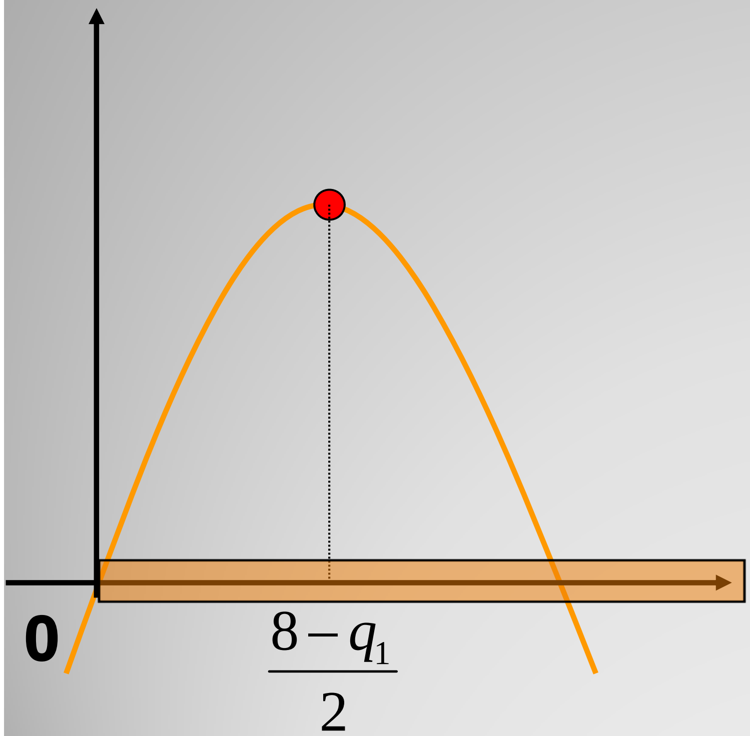
- 企業2の利潤は、q2に関して上に凸な放物線であり、最大値は、q2 が0以上であるという条件を無視すれば

$$q_2 = \frac{8 - q_1}{2}$$

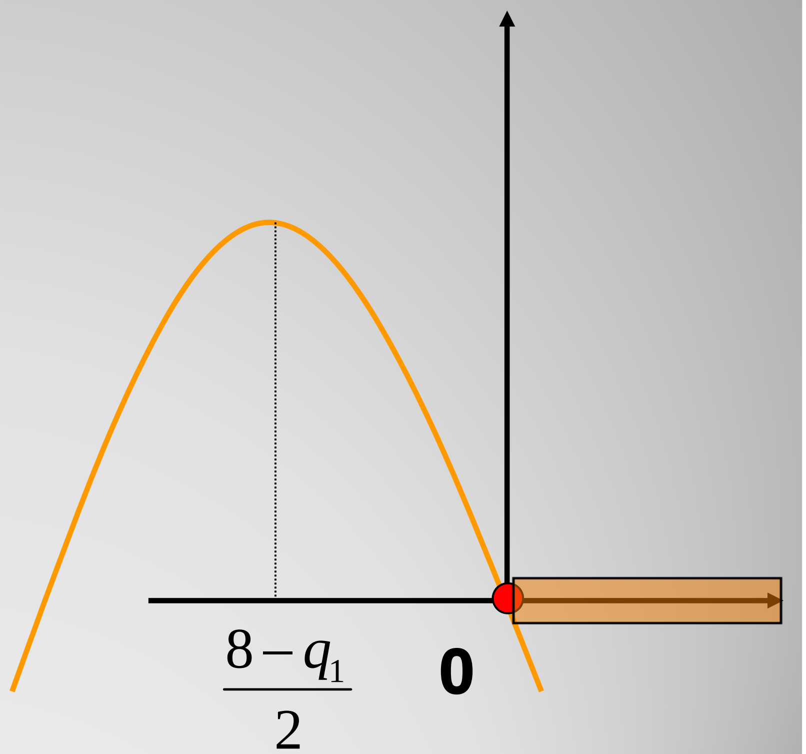
- で与えられる。

(2) の解答

$8 - q_1 \geq 0$



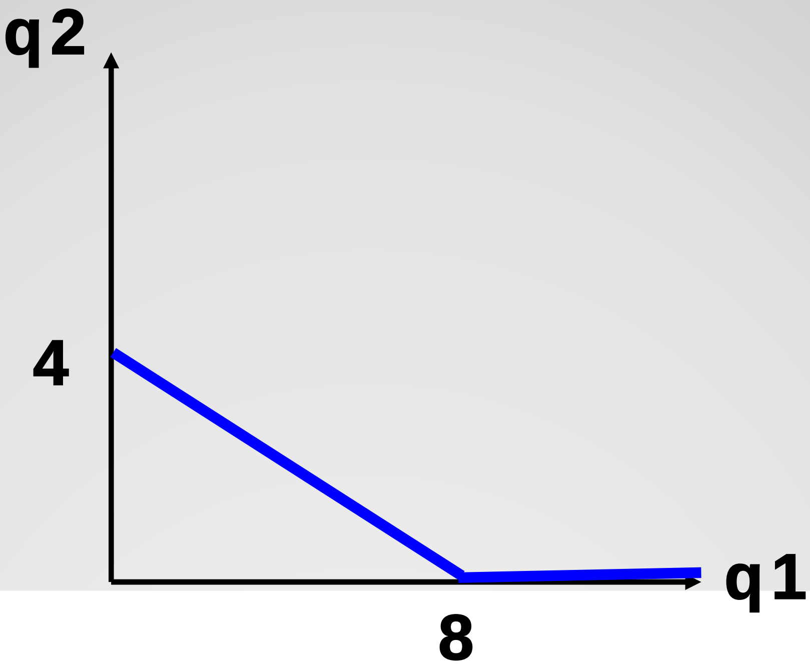
$8 - q_1 < 0$



(2) の解答

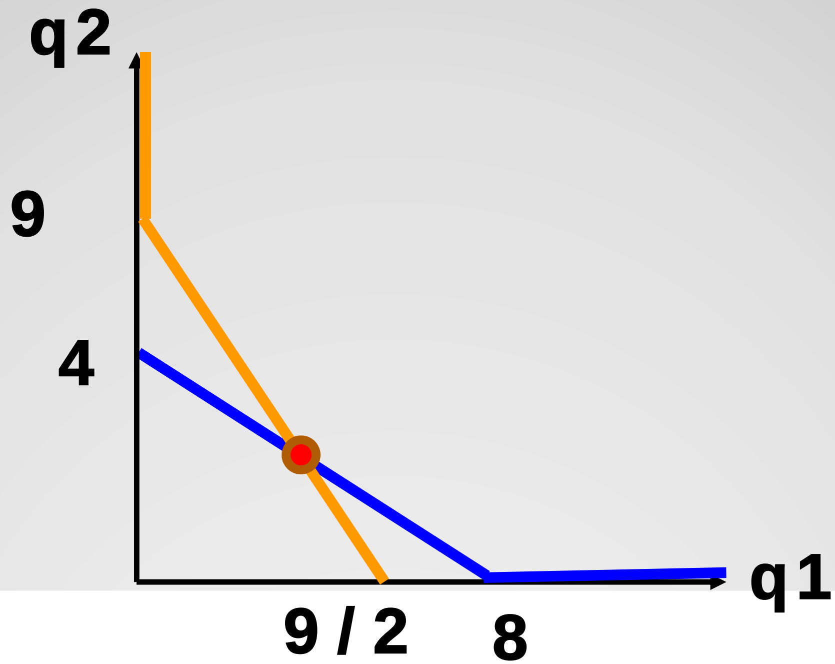
- 企業2の最適反応（反応関数）は、

$$q_2 = \begin{cases} \dfrac{8-q_1}{2} & 8 \geq q_1 \\ 0 & 8 < q_1 \end{cases}$$



(2) の解答

- 企業１、企業２の最適反応（反応関数）をグラフに書き込むと、下の図のようになる。この交点の座標を求めると、(q1,q2)=(10/3, 7/3)となる。
- これがクールノーナッシュ均衡における生産量である。



(2) の解答