ゲーム論II 第三回宿題

上條　良夫

注意点

- 次回講義 (11 月 9 日) 開始時に回収する。
- 答案用紙を印刷し，そこに解答を記述すること。
- 解答欄が足りない場合には，印刷した答案用紙の裏面を利用すること。提出できるのは，答案用紙一枚だけである。

問題 1. 第三回講義宿題のゲーム 1 のサブゲーム完全均衡を求めよ。ただし，講義で用いた記号法に従うこと。つまり，第 1(3, 5, 7, ...) 期のプレイヤー A の自身の取り分を x, 第 2(4, 6, 8, ...) 期のプレイヤー B の自身の取り分を y として，x, y の値を求めなさい。

問題 2. 交互提案応答ゲームにおいて，割引因子の代わりに，交渉の存続確率 p を次のように導入する。応答者が提案を拒否すると，確率 p で役割を入れ替えて交渉が続行され，確率 $1-p$ で交渉は終了し，双方ともに利得は 0 である。各プレイヤーは期待利得を最大化するとして，部分ゲーム完全均衡を求めよ。ただし，記号法は問題 1 と同様にすること。

問題 3. 講義で最初に扱った，最も基本となる交互提案応答ゲームについて考えよう。ただし，ここでは，プレイヤー A, B の利得関数をより一般的に $u_A(x), u_B(y)$ と表すことにする。$u_A(x)$ はプレイヤー A の自身の取り分が x のときの利得を表し，$u_B(y)$ はプレイヤー B の自身の取り分が y のときの利得を表すとする。また，割引因子を δ とすると，t 期後の利得は単に利得関数の値を δ で割り引いたものとする。例えば，t 期後に x を獲得するときのプレイヤー A の利得の現在価値は

$$\delta^t u_A(x)$$

となる。(もしどうしても一般的な利得関数の表現に馴染めないのならば，とりあえずは $u_A(x) = x^2$, $u_B(y) = y$ として考えてみて，その後，関数を特定化することなく考えてみること。)

以上の設定の下，部分ゲーム完全均衡を導出することを試みる。下の各問いに答えよ。

(1) 第三期で交渉が合意されるときの利得の組を $(x', 1-x')$ とする。このとき，第二期でのプレイヤー B の提案 $(1-y, y)$ の y はどのような条件を満足するか。(つまり，第三回講義の (1) 式に相当する式を求める。)

(2) 第二期で交渉が合意されるときの利得の組を $(1-y, y)$ とする。このとき，第一期でのプレイヤー A の提案 $(x, 1-x)$ の x はどのような条件を満足するか。(つまり，第三回講義の (2) に相当する式を求める。)

(3) 定常性の仮定より，$x = x'$ が成り立つとする。このとき，(1) で求めた式と (2) で求めた式から δ を消去することにより，x と y が満足すべき恒等式を得ることができる。この恒等式を求めなさい。

(4) (1) と (2) と定常性の条件から求められる x, y のことをそれぞれ，$x^*(\delta), y^*(\delta)$ とおくことにする。(つまり，部分ゲーム完全均衡における x, y の値は δ に依存しいることを表現している。) 今，関数 $f(z)$ を

$$f(z) = u_A(z)u_B(1-z)$$

とおく。ただし，z は 0 以上 1 以下である。この $f(z)$ は解答欄にあるように，点 $f(0) = 0$, $f(1) = 0$ を満たす，逆 U 字型の関数であるとする。このとき，解答欄のグラフに点 $(x^*(\delta), f(x^*(\delta)))$ と 点 $(1-y^*(\delta), f(1-y^*(\delta)))$ を記入せよ。ただし，$x^*(\delta) > 1-y^*(\delta)$ が成立することは仮定して，(3) で求めた恒等条件に注意すること。(恒等条件さえ表現できていれば，具体的な点の場所については各自の判断に任せる。)

(5) 今，δ が 1 に近づくにつれて，$x^*(\delta)$ は徐々に小さくなり，$1-y^*(\delta)$ は徐々に大きくなり，最終的には両者は一致すると仮定する。この一致するときの $x^*(\delta)$ 値を x^{**} とすると，x^{**} はどのような条件を満足する値となるか。