千葉大学　ゲーム論II　第八回

上條　良夫

問題5のみんなの解答

- 問い　ナッシュの交渉解を公理化する四つの条件の中で、最も納得いかないものを答えよ。

- パレート最適性 ･･･ 2名
- 対称性 ･･･17名
- 正一次変換からの独立性 ･･･14名
- 無関係な選択肢からの独立性 ･･･13名

性質①:交渉解のパレート最適性

- 交渉解 F は次の条件を満足するとき、パレート最適であるという。
  - 任意の交渉問題 (U,d) に対して、F(U,d) は U におけるパレート最適な利得の組み合わせである。
- つまり、交渉解は常にパレートフロンティア上の利得の組を選択する。

性質②:交渉解の対称性

- 交渉解 F は次の条件を満足するとき、対称であるという。
  - 任意の対称な交渉問題 (U,d) に対して、
  - $F_1(U,d) = F_2(U,d)$
- つまり、交渉解は、仮に交渉問題が対称であるならば、両者の効用が等しいことを要求する。

性質③:交渉解の正一次変換からの独立性

- 交渉解 F は次の条件を満足するとき、正一時変換から独立であるという。
  - 任意の交渉問題 (U,d) と
  - (U,d) の正一次変換として得られる交渉問題 (U’,d’) に対して、

$$u'_1 = \alpha_1 u_1 + \beta_1, \quad u'_2 = \alpha_2 u_2 + \beta_2,$$

$$d'_1 = \alpha_1 d_1 + \beta_1, \quad d_2 = \alpha_2 d_2 + \beta_2,$$

以下が成り立つ。（α1>0, α2 >0）

$$F_1(U',d') = \alpha_1 F_1(U,d) + \beta_1, \quad F_2(U,d) = \alpha_2 F_2(U,d) + \beta_2$$

- つまり、交渉解が選択する交渉の結果は、効用の尺度が変換されたとしても影響されない。

性質④:交渉解の無関係な選択肢からの独立性

- 交渉解 F は次の条件を満足するとき、無関係な選択肢から独立であるという。
  - 任意の交渉問題 (U,d) と
  - U を包含するような集合 T に対して、
  - 仮に F(T,d) が U 内の利得の組み合わせであるならば、F(U,d) は F(T,d) と一致する。

- つまり、交渉解が選択する交渉の結果は、無関係な選択肢が削除されたとしても影響されない。

対称性を取り除くと

- 対称性以外の三つの条件だけでも、ある程度、交渉解の範囲を絞ることは可能。
- では対称性以外の三つの条件を満足するような交渉解の範囲を特定化することができるのか？
- 可能である。

非対称Nash 解

- $0 < p < 1$.

- 重みを (p, 1-p) とする非対称ナッシュ解F^{*p}とは、任意の交渉問題 (U,d) に対して、

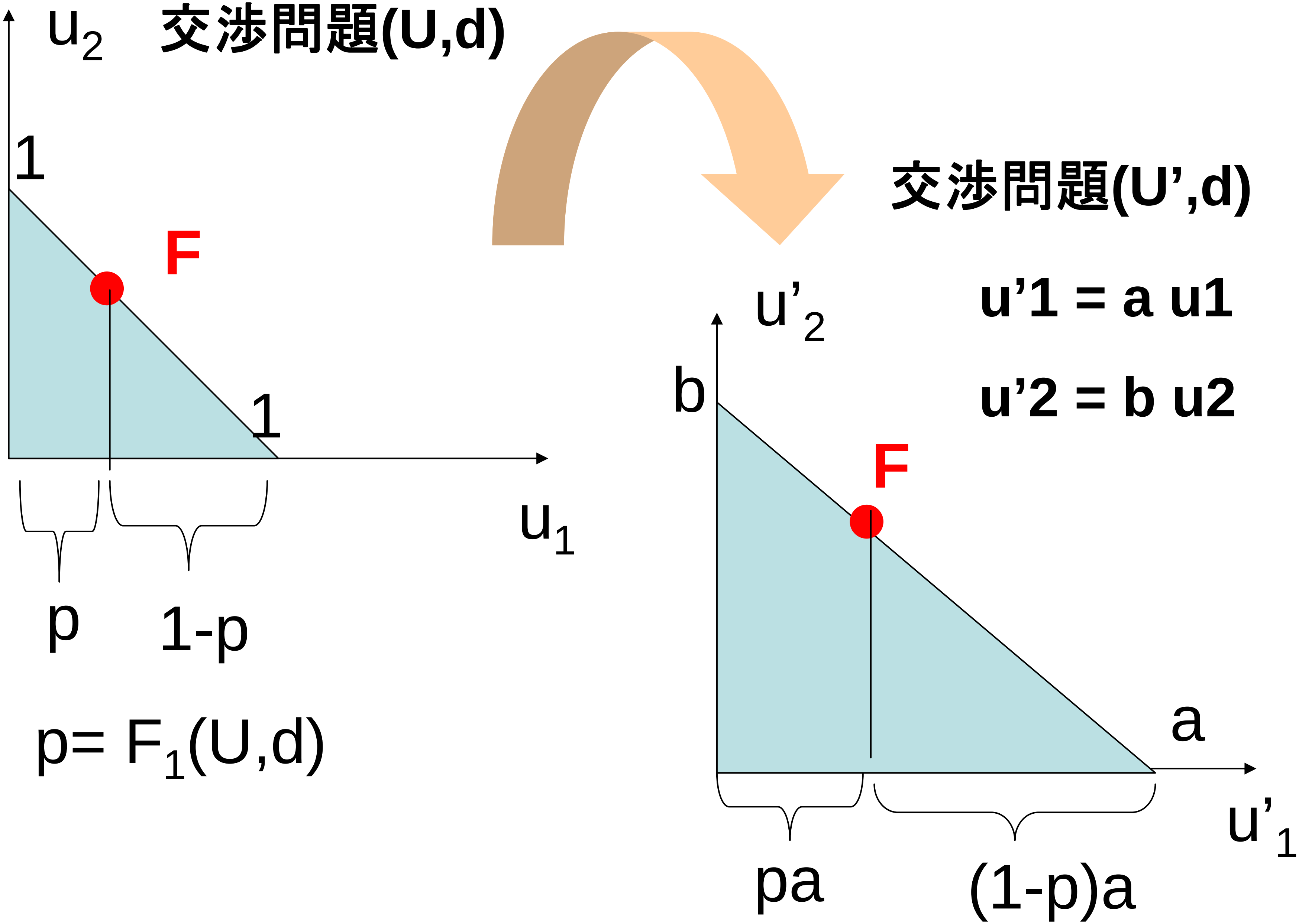
$$\mathbf{(u_1 - d_1)^p \times (u_2 - d_2)^{1-p}}$$

- を最大化するような U 内の効用の組を選択するルールである。

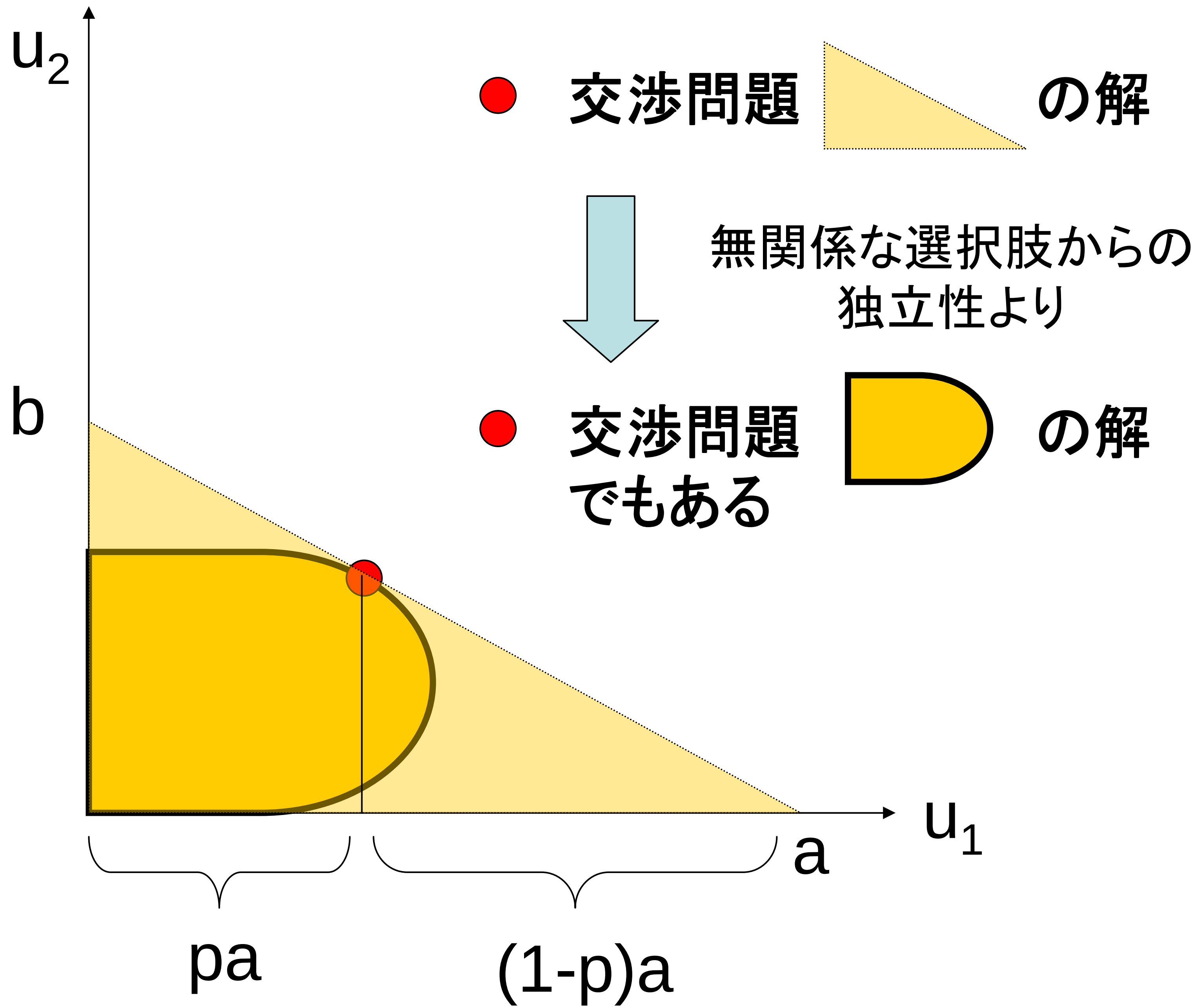
- 定理（Kalai, 1977, International Journal of Game Theory）

- ある交渉解 F が、
  - ①パレート最適性、
  - ③効用の正一次変換からの独立性、
  - ④無関係な選択肢からの独立性、
- を満足するのならば、
- ある p ($0 < p < 1$) が存在して、$F = F^{*p}$ である。

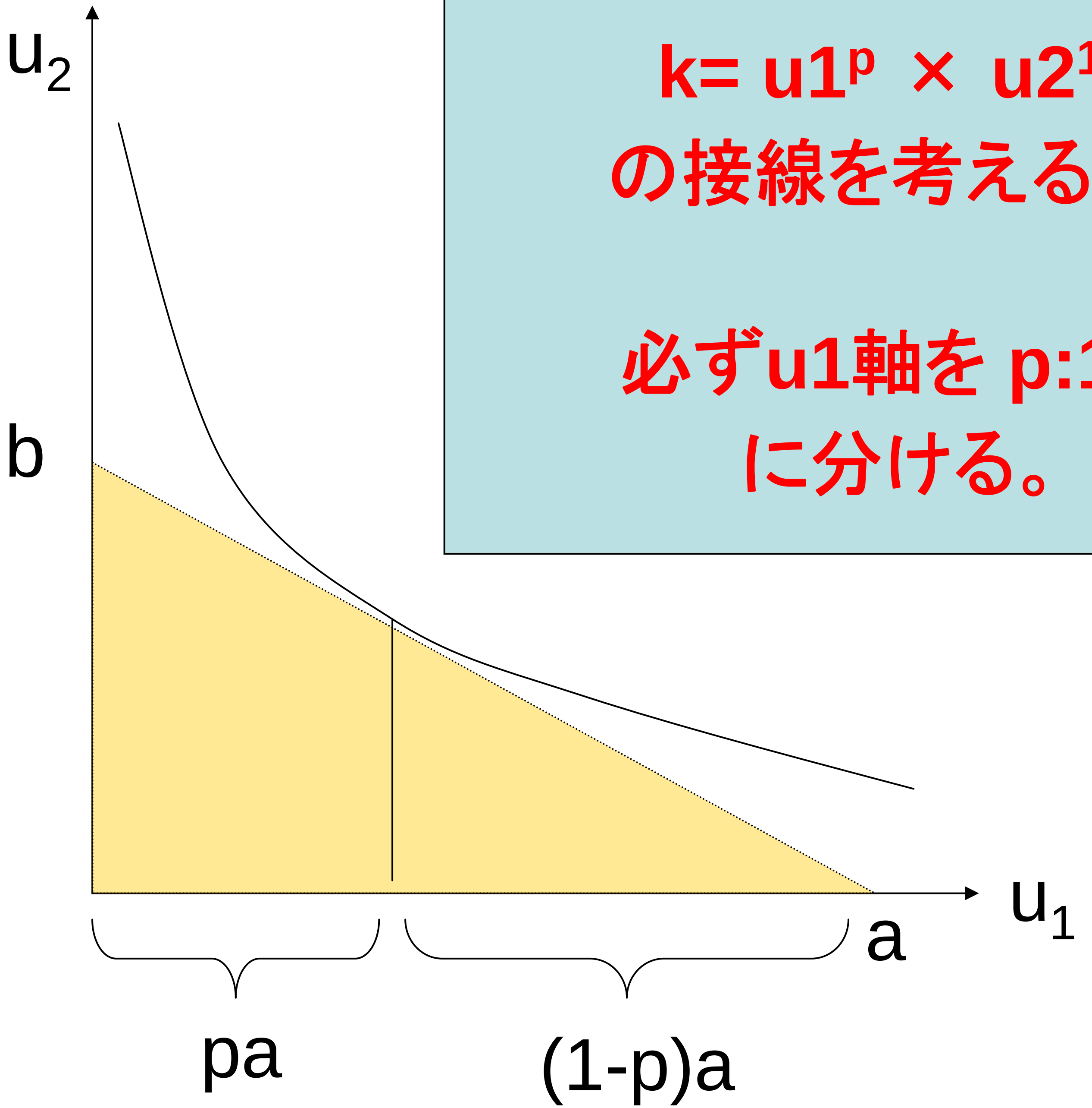
- また、その逆も成立する。（任意の p ($0 < p < 1$) に対して、F^{*p} は、条件①、③、④を満足する。）



交渉問題(U,d)
u2
1
F
1
u1
p
1-p
p= F1(U,d)
交渉問題(U’,d)
u’2
u’1 = a u1
u’2 = b u2
b
F
a
u’1
pa
(1-p)a



u2
交渉問題
の解
無関係な選択肢からの
独立性より
b
交渉問題
でもある
の解
u1
a
pa
(1-p)a



$k = u1^{p} \times u2^{1-p}$
の接線を考えると、

必ずu1軸を p:1-p
に分ける。

交渉解の正一次変換からの独立性を取り除くと

- 交渉解の正一次変換からの独立性を満たさないで、その他の三つの条件を満たすような交渉解は存在するのか。

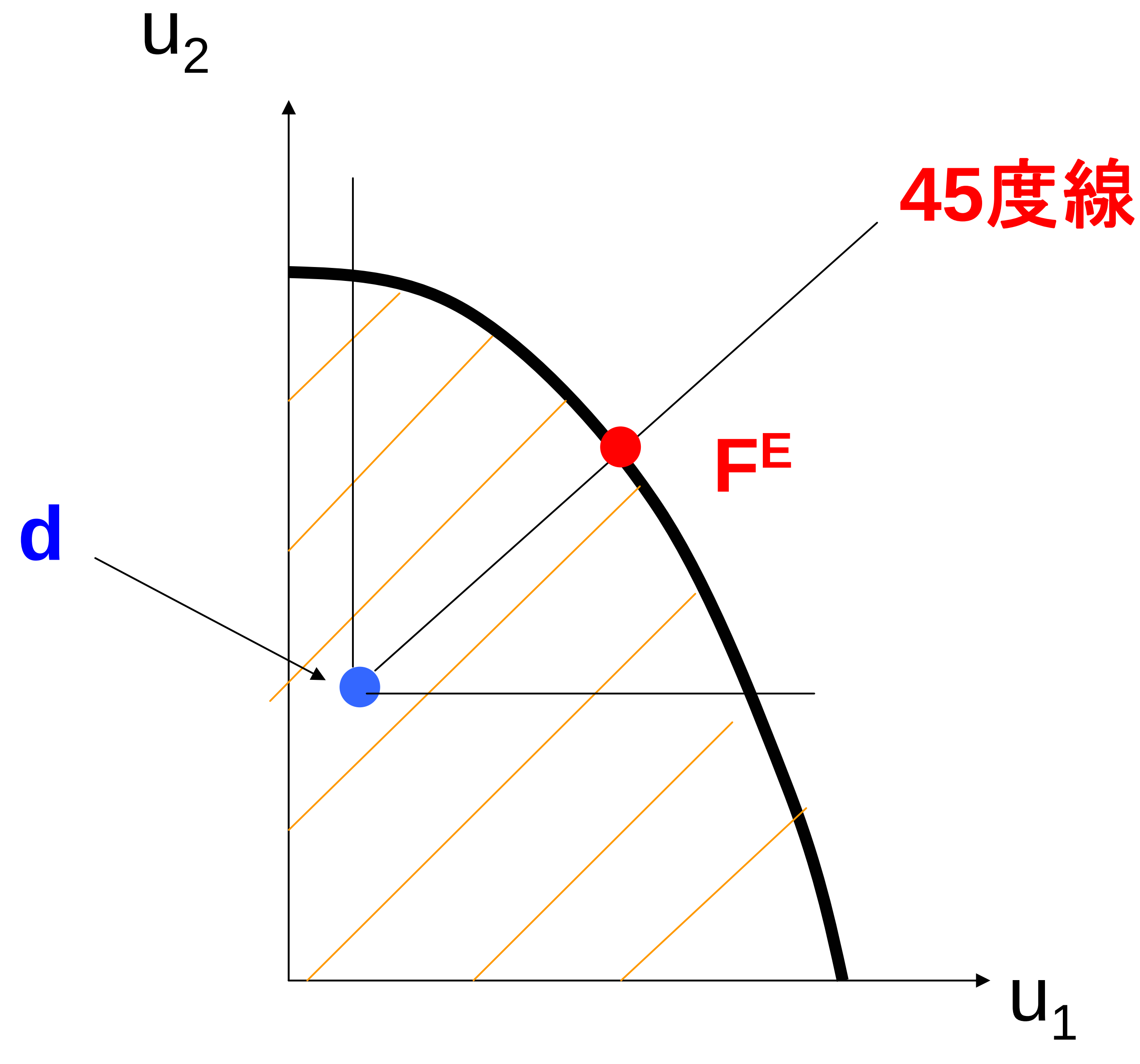
- 存在する。

均等解

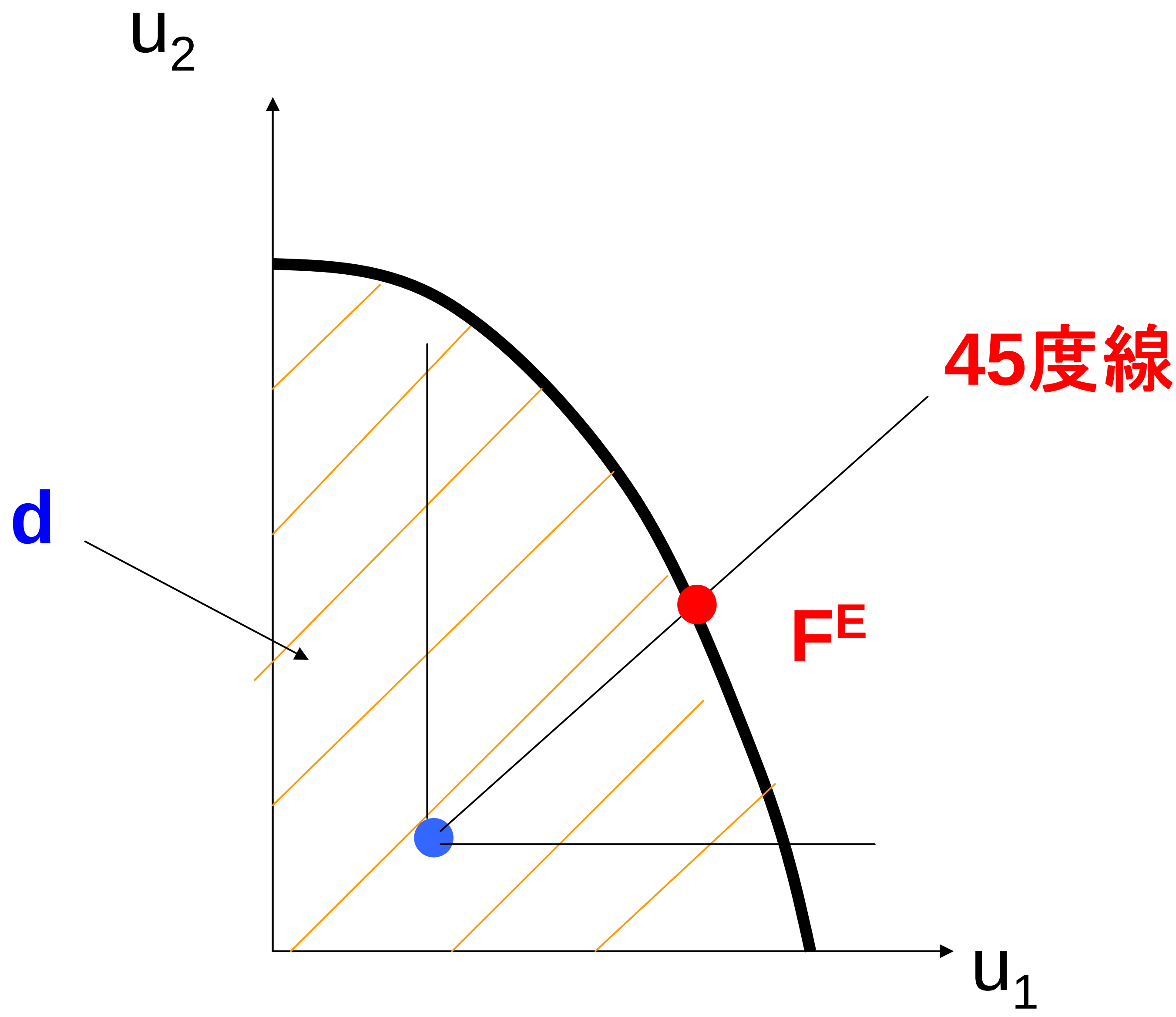
- 均等解F^E とは、任意の交渉問題 (U,d) に対して、

$$(u_1 - d_1) = (u_2 - d_2)$$

- となるような U の弱パレートフロンティア上の効用の組を選択するようなルールである。



u_2
45度線
F^E
d
u_1



u2
45度線
d
FE
u1

- 均等解は、
  - 弱パレート最適性
  - 対称性
  - 無関係な選択肢からの独立性
- を満たす交渉解である。

無関係な選択肢からの独立性を取り除くと

- 交渉解の正一次変換からの独立性を満たさないで、その他の三つの条件を満たすような交渉解は存在するのか。

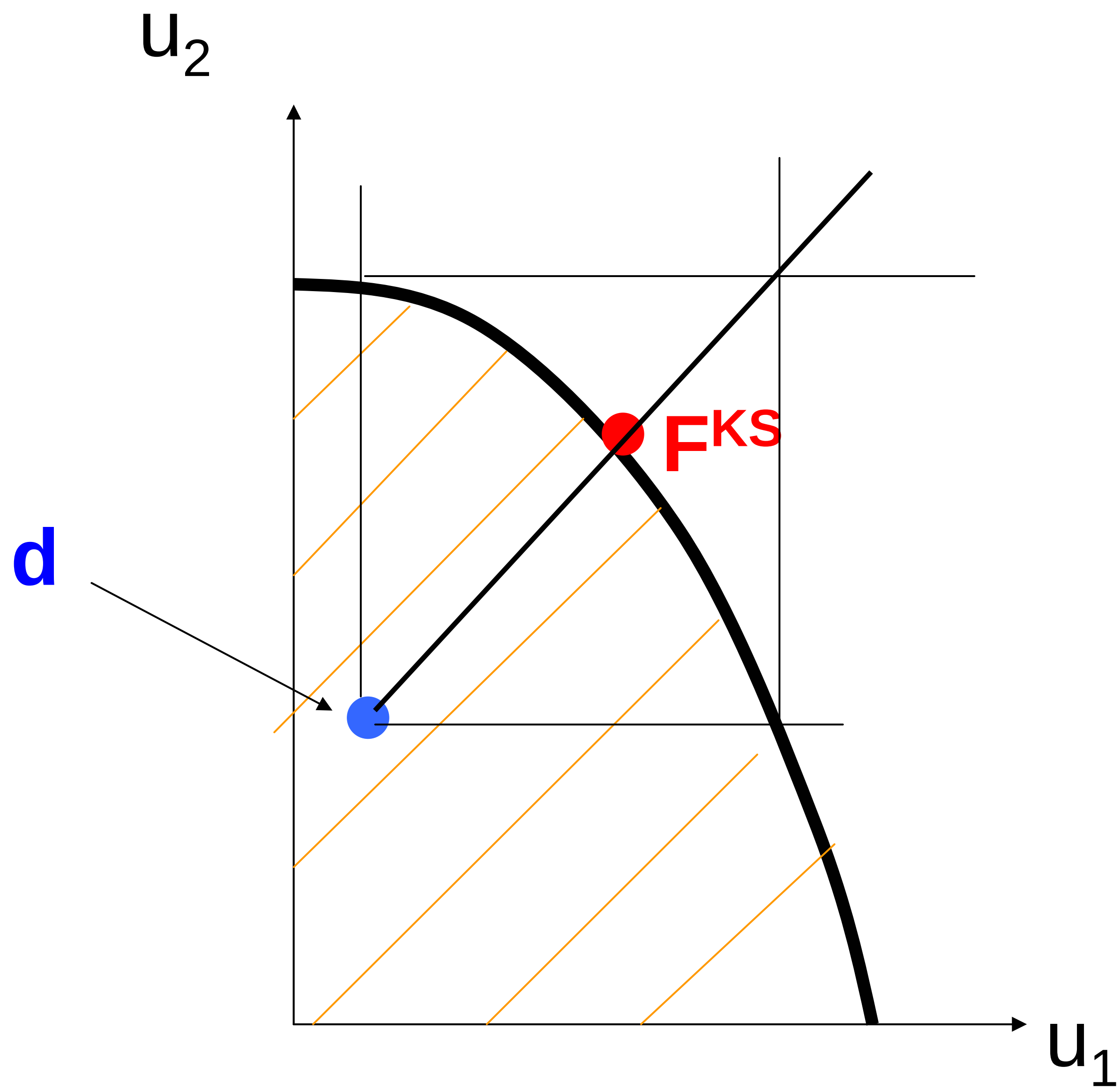
- 存在する。

Kalai-Smorodinsky 解

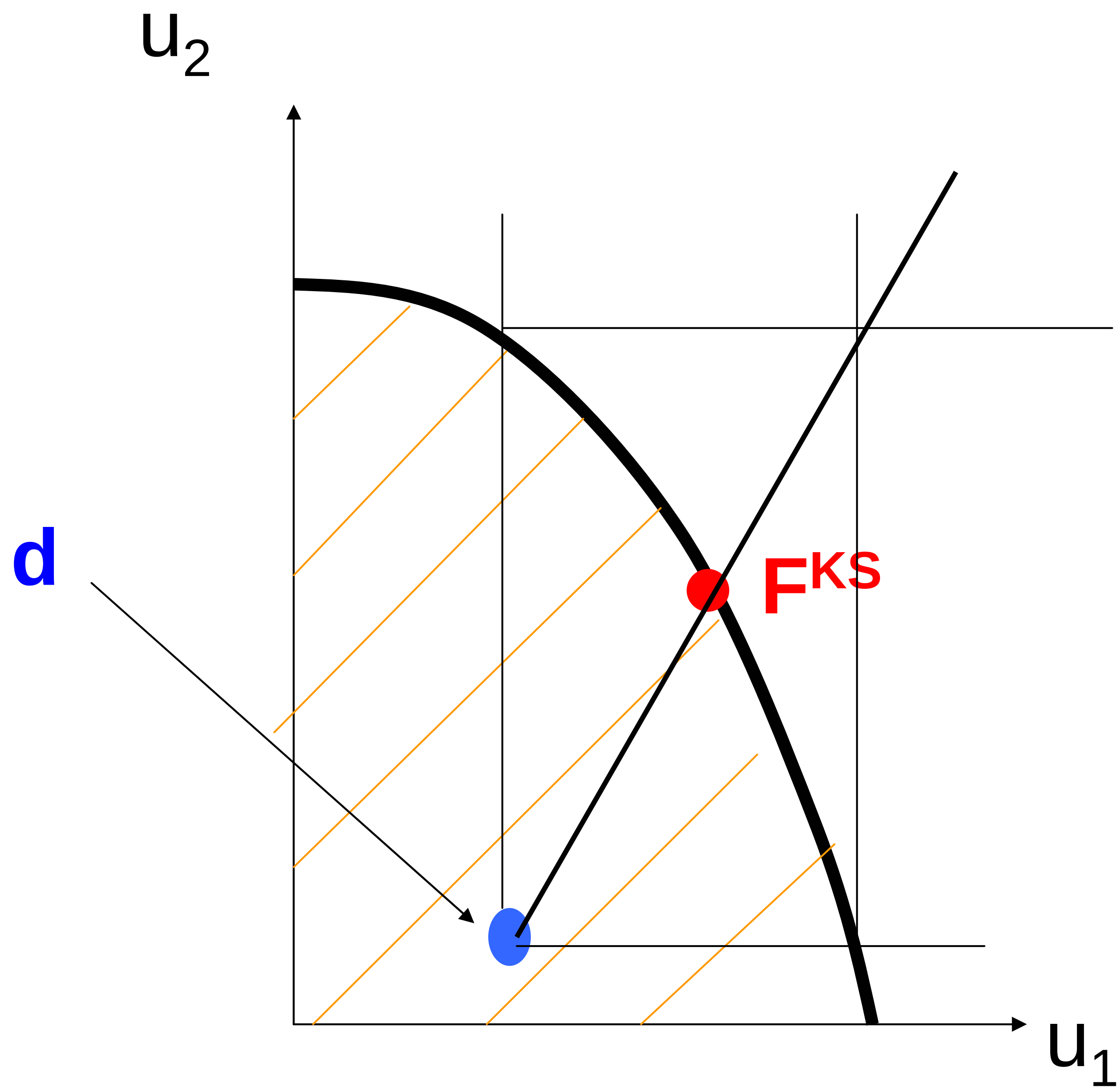
- Kalai-Smorodinsky 解F^{KS} とは、任意の交渉問題 (U,d) に対して、

$$(u_1 - d_1) : (u_2 - d_2) = (m_1 - d_1) : (m_2 - d_2)$$

- となるような U のパレートフロンティア上の効用の組を選択するルールである。
  - ここで、m_1 は U 内の個人合理的な点の中での、プレイヤー1の利得の最大値である。
  - m_2 は U 内の個人合理的な点の中での、プレイヤー2の利得の最大値である。



u_2
F^{KS}
d
u_1



u_2
d
F^{KS}
u_1

- 交渉問題 (U, d) に対して,プレイヤー i の個人合理的な U の範囲内での効用の最大値を

$$m_i(U, d)$$

- と書く。

交渉解の単調性

- 次の条件を満足するような交渉問題 (U, d) と (U’, d) を考える。

$$U \subset U'$$

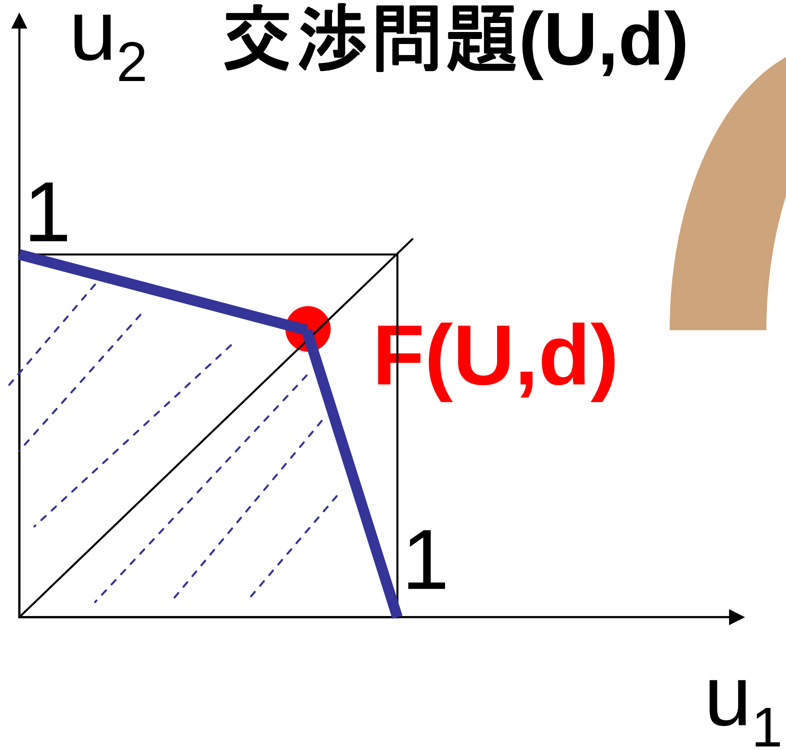
$$m_i(U,d) = m_i(U',d)$$

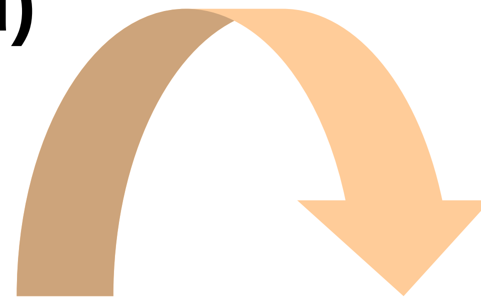
- このとき,

$$f_j(U,d) \le f_j(U',d)$$

- が成り立つ。

交渉問題(U,d)

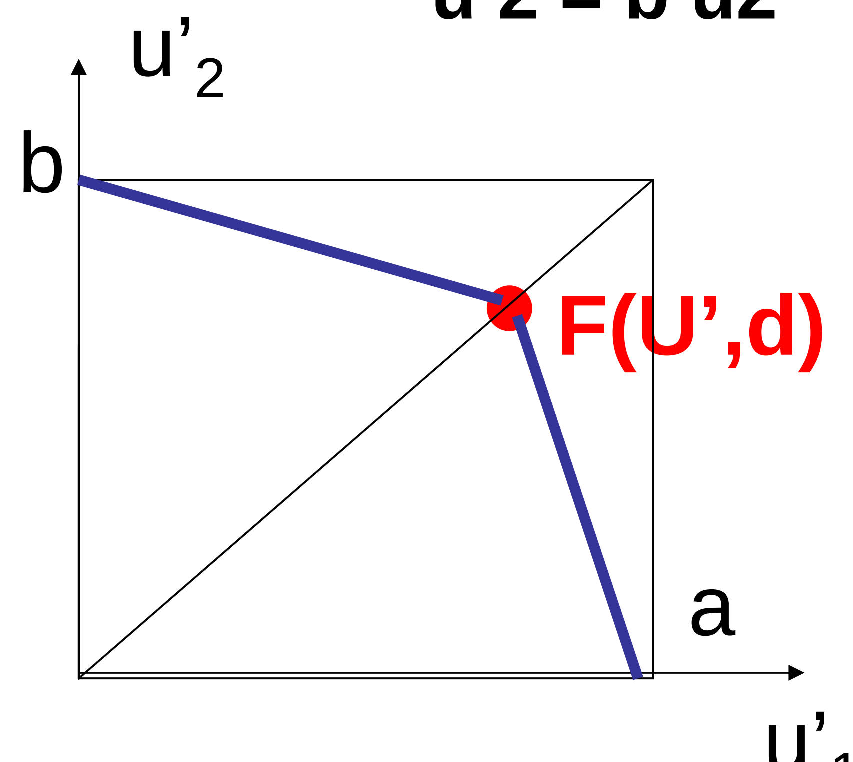


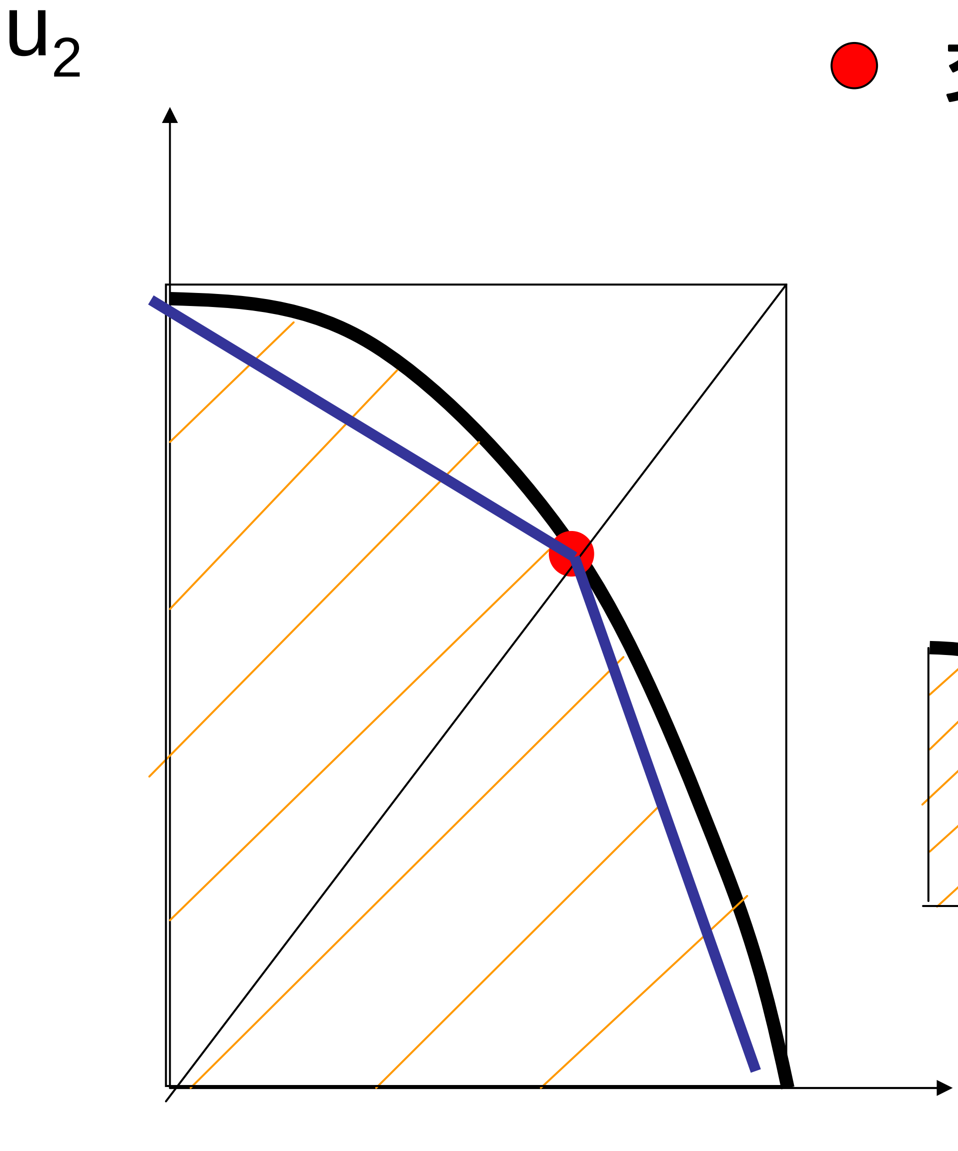


交渉問題(U’,d)

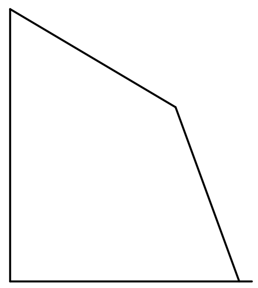
u’1 = a u1

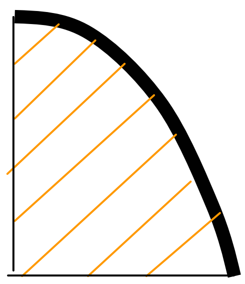
u’2 = b u2





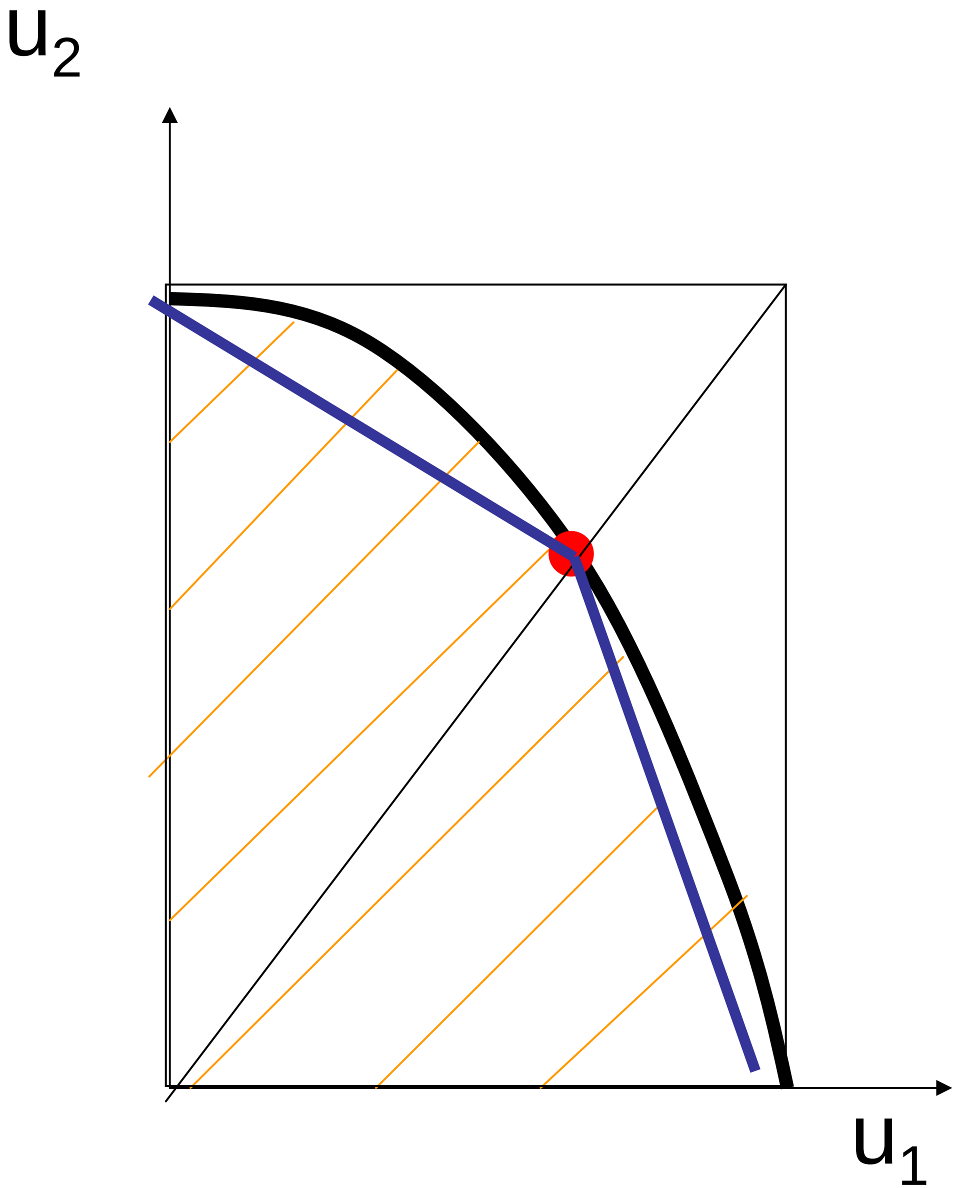
● 交渉問題 (U,d) の解

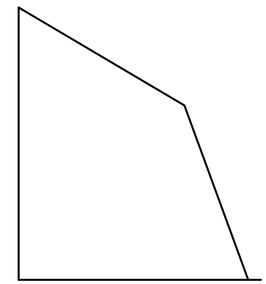




交渉問題 (U’,d)

● 交渉問題　(U,d)　の解





m2(U’,d)=m2(U,d)

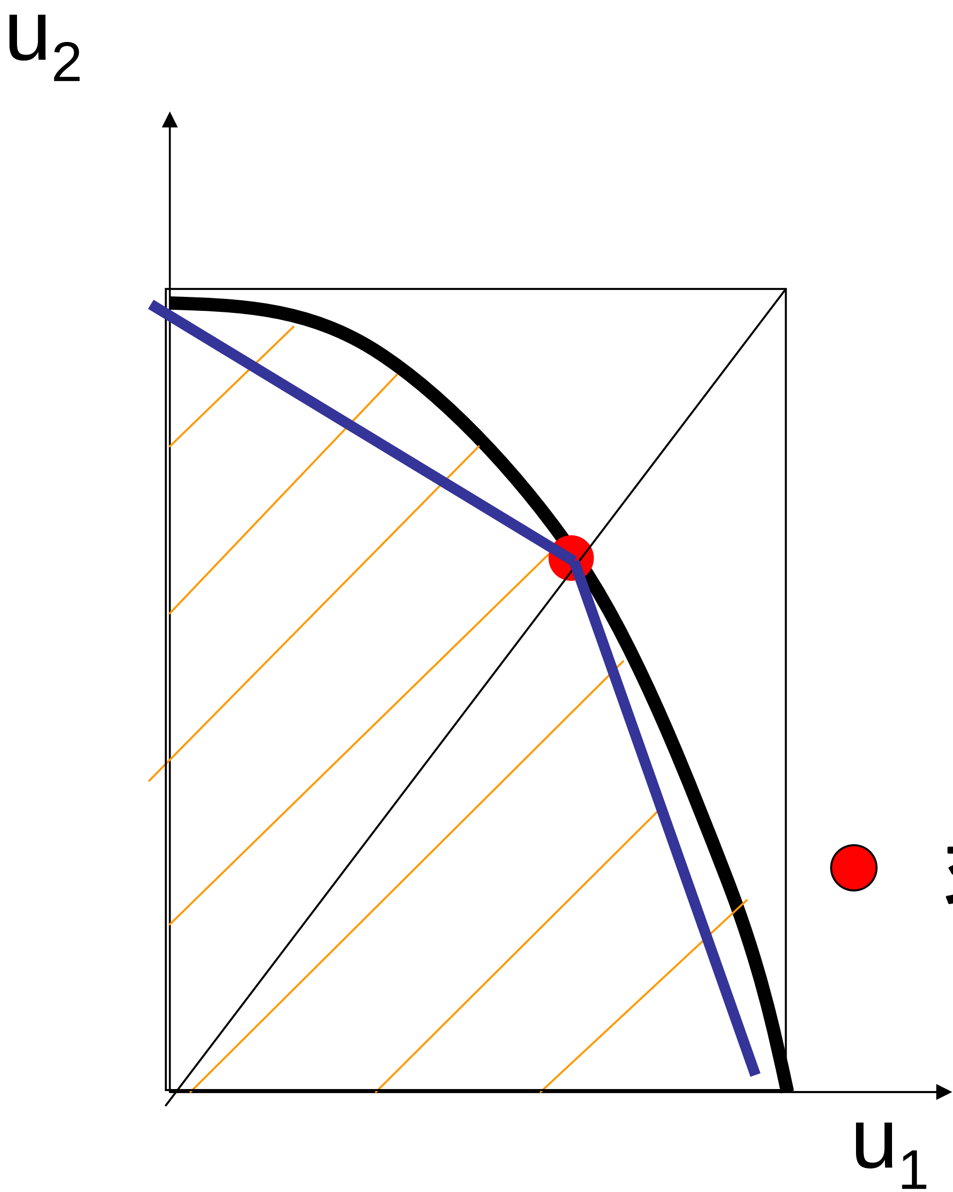
U’ は U を含む

単調性より、

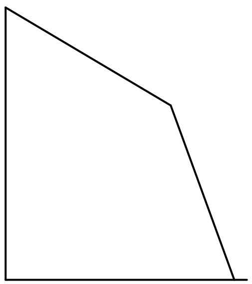
F1(U’,d) >= F1(U,d)

同様に、

F2(U’,d) >= F2(U,d)



- **交渉問題　(U,d)　の解**

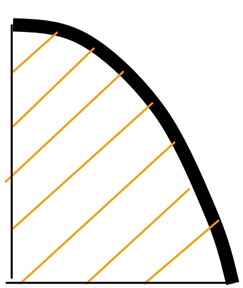


つまり、

F1(U’,d) = F1(U,d)

F2(U’,d) = F2(U,d)

- **交渉問題　(U’,d)　の解**



- 定理（Kalai and Smorodinsky, 1975, Econometrica）

- ある交渉解 F が、
  - ①パレート最適性、
  - ②対称性
  - ③効用の正一次変換からの独立性、
  - ⑤単調性、
- を満足するのならば、
- それは KS 解である。

- また、その逆も成立する。（KS 解は、条件①、②、③、⑤を満足する。）

まとめ

- 今日で、交渉問題に対する公理的アプローチは終了。
- 次回は、交渉がなぜ決裂するのか、という点を情報不完備ゲームを用いて説明する。
- 次回で交渉に関する講義は終了する（予定）。