

# 千葉大学 ゲーム論II 第五,六回

担当

上條 良夫

# 本日の講義内容

- 前回宿題の問題3の解答
- Nash の交渉問題
- Nash 解とその公理的特徴づけ

# 宿題の問題3の解答

- ホワイトボードでやる。

# Nash の二人交渉問題

- Nash の二人交渉問題は以下の二つから構成される。
  - $\mathbf{U}$ : 交渉により実現可能な効用の組み合わせ  $(u_1, u_2)$  の集合 (交渉の実現可能集合)
  - $\mathbf{d} = (d_1, d_2)$ : 交渉が不成立のときの互いの効用の組 (交渉の不一致点)
- 交渉問題は、 $(\mathbf{U}, \mathbf{d})$  と表される。

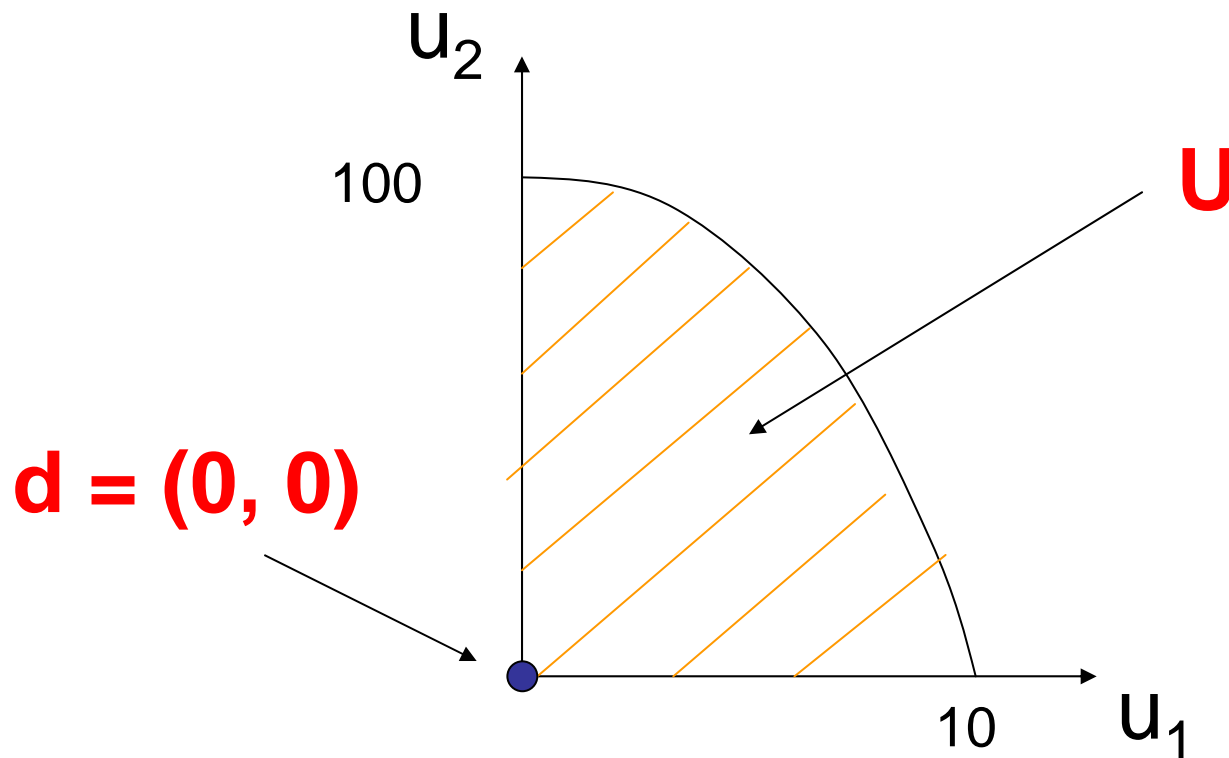
# 例

- 100万円を二人(プレイヤー1とプレイヤー2)で分け合う状況を考える。
- プレイヤー1の取り分を  $x$
- プレイヤー2の取り分を  $y$
- このとき、
  - $x + y \leq 100$ ,
  - $x \geq 0$ ,
  - $y \leq 0$
- それぞれの効用関数を
  - $u_1(x) = x^{1/2}$
  - $u_2(y) = y$
  - 交渉が決裂すると、双方ともに何ももらえない。

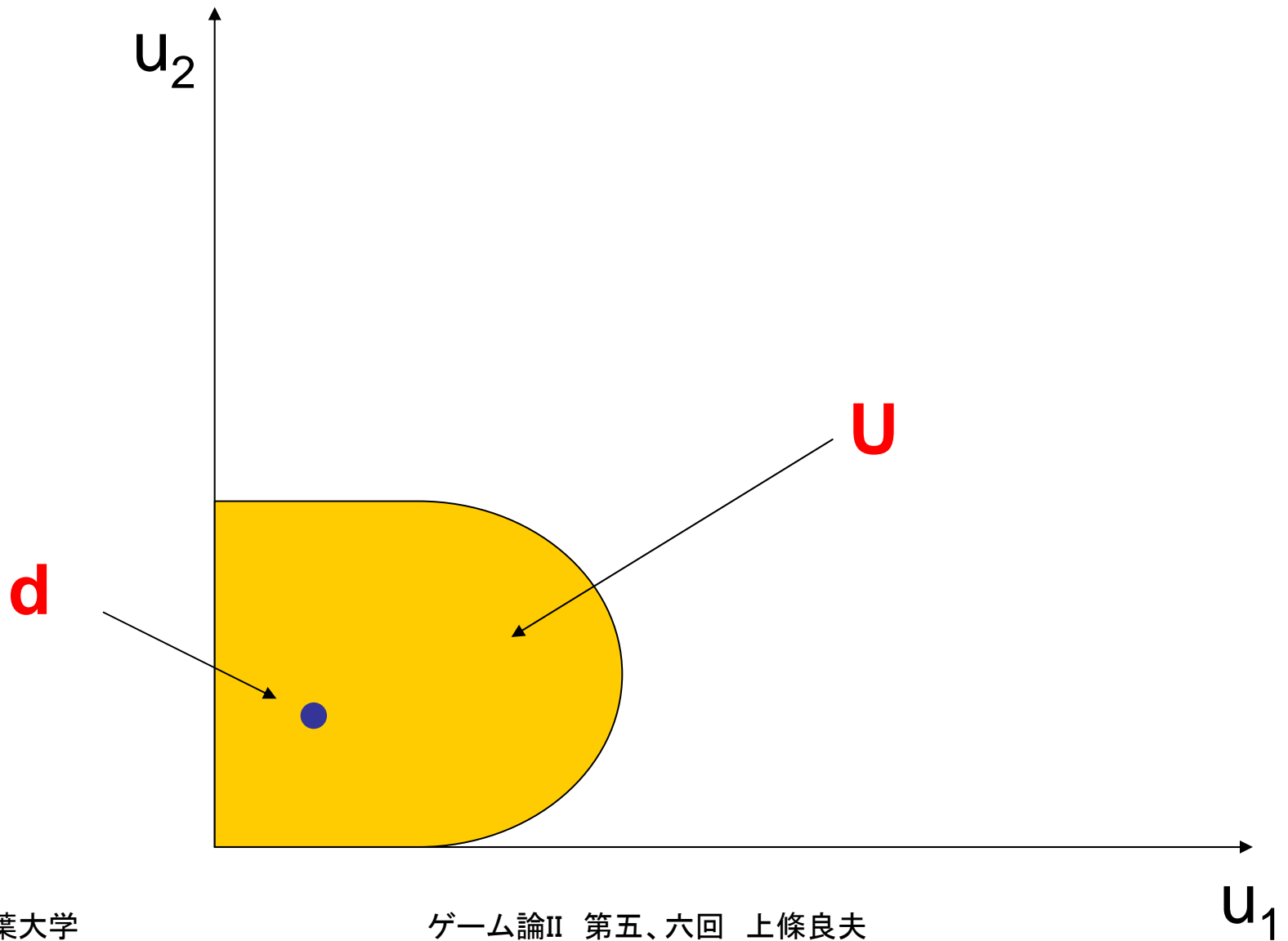
- 100 万円をちょうどふたりに分ける状況を考えると、 $y = 100 - x$  なので

$$u_2 = y = 100 - x = 100 - (u_1)^2$$

$$\therefore u_2 = 100 - (u_1)^2$$



# より一般的な交渉問題の例



- つまり、ここで考える交渉問題とは、それがどのような問題に対しての交渉であるのかということについては明示することはしない。
- 代わりに、交渉問題のより根幹となる部分、つまり
  - 交渉によりどのようなことが達成可能であるのか
  - 交渉が決裂したら何がおきるのか
- という点にだけ注目するのである。
- 我々のここでの関心は、このように抽象化されてしまった交渉問題において、どのような点が交渉により到達されそうであるのか(交渉解)、という点を考えることである。



# パレート最適

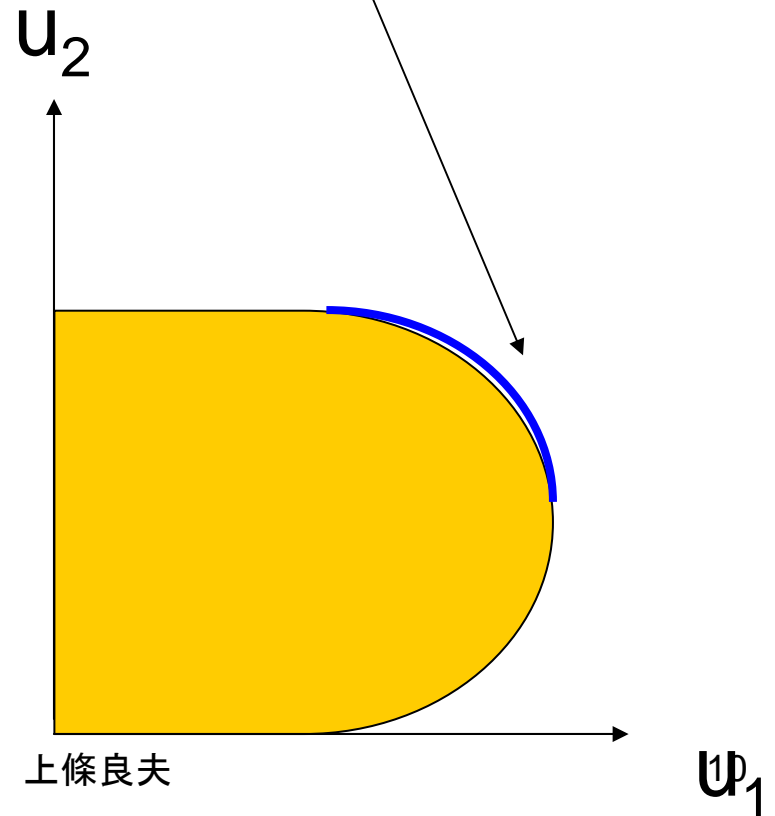
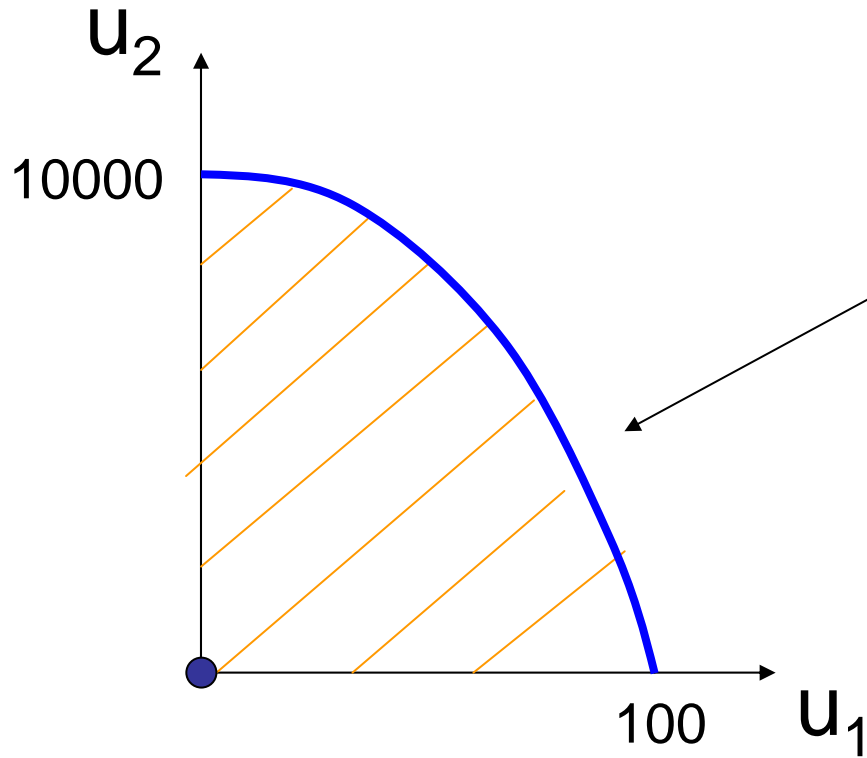
- 実現可能集合  $U$  内のある利得の組み合わせ  $u = (u_1, u_2)$  がパレート最適であるとは、
  - 双方ともに  $u$  と同程度に好み、いずれか一方は  $u$  よりも厳密に好むような  $U$  内の他の利得の組み合わせ  $t = (t_1, t_2)$  が存在しないことである。
- 言い換えれば、 $U$  内に次の条件を満足する  $t = (t_1, t_2)$  が存在しないことである。

$$(i) \quad t_1 \geq u_1 \quad \text{and} \quad t_2 \geq u_2$$

$$(ii) \quad t_1 > u_1 \quad \text{or} \quad t_2 > u_2$$

# パレートフロンティア

(パレート最適な点の集合)



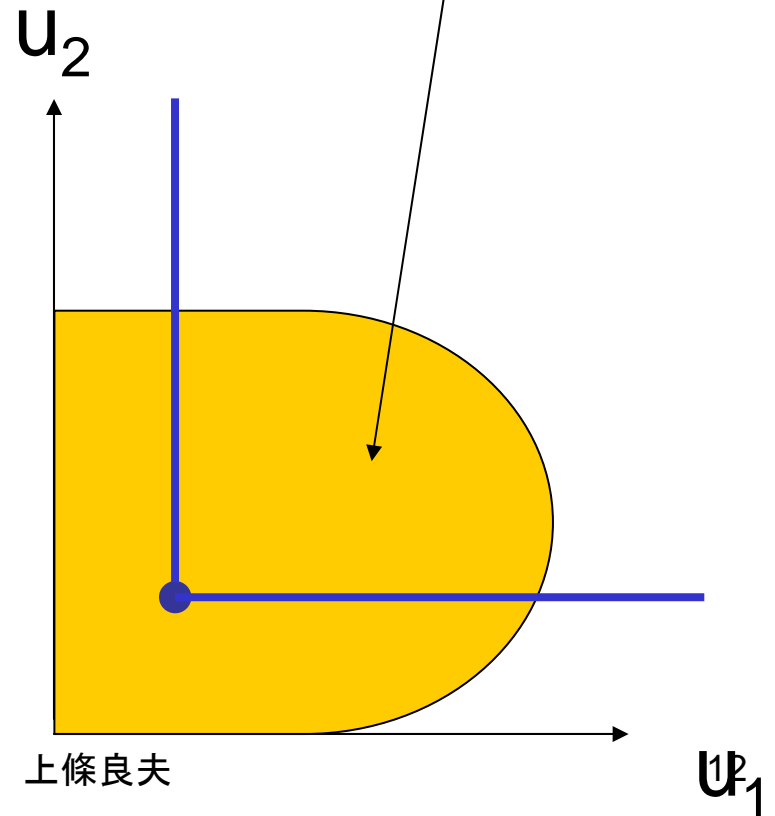
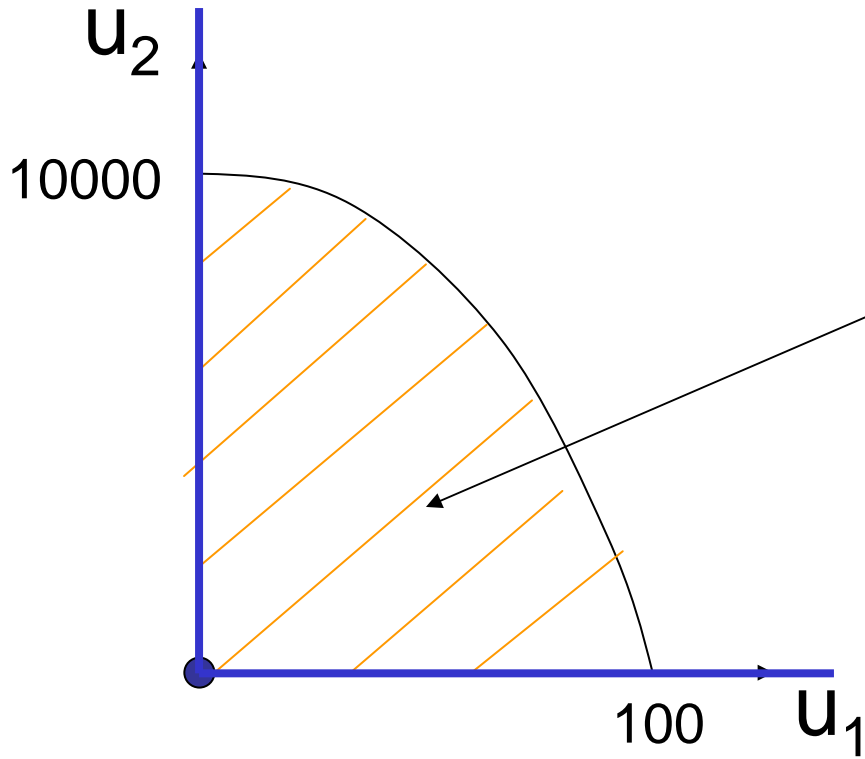
# 個人合理性

- 実現可能集合内の利得の組み合わせが  $u$  が二人にとって  $d$  よりも少なくとも同程度の好ましいとき、 $u$  は個人合理的である。
- つまり、 $u=(u_1, u_2)$  が以下の条件を満足するとき、 $u$  は個人合理的である。

$$u_1 \geq d_1$$

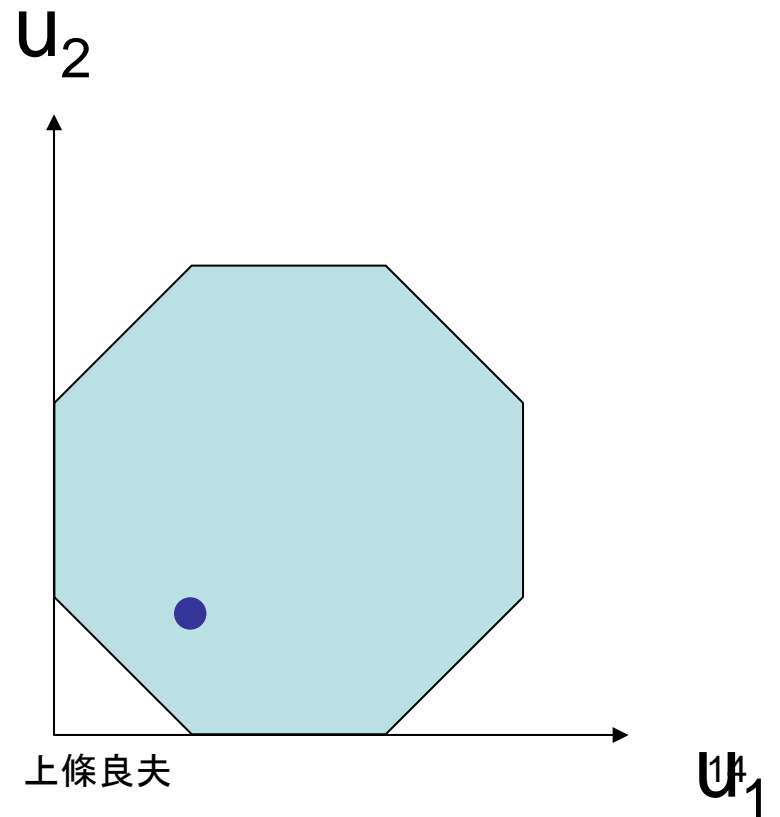
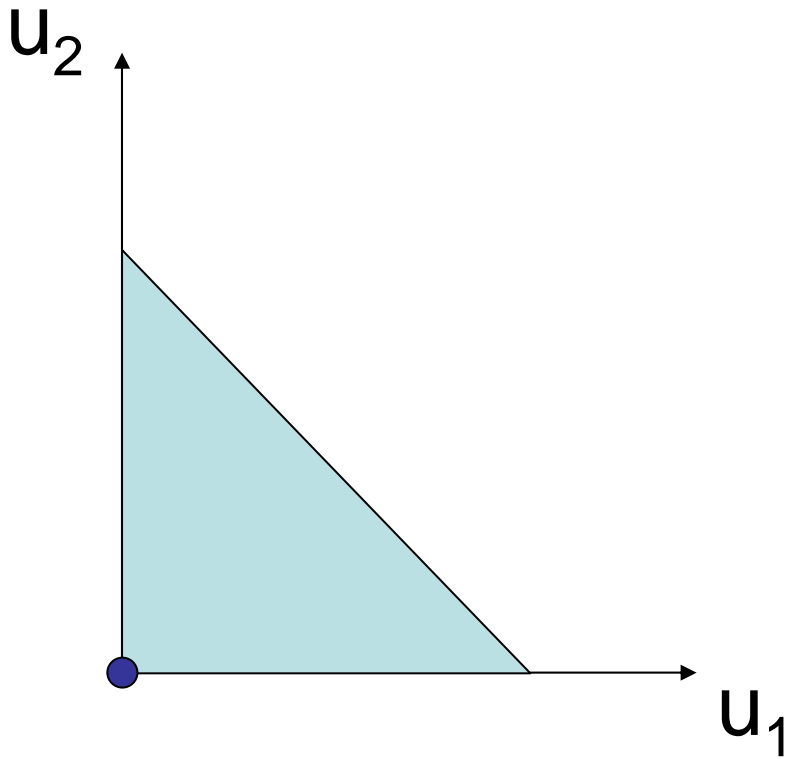
$$u_2 \geq d_2$$

# 個人合理的な点の集合



# 対称性

- 以下の条件を満足するとき、交渉問題  $(U, d)$  は**対称**であるといわれる。
  - 効用の組み合わせ  $(a, b)$  が実現可能集合  $U$  に属するのならば、 $(b, a)$  も実現可能集合  $U$  に属する。
  - $d_1 = d_2$



# 交渉解

- 交渉問題  $(U, d)$  に対して、 $U$  内の個人合理的な効用の組を一つ選ぶルールのことを、**交渉解**とよぶ。
- 交渉解を  $F$  で表すと、各交渉問題  $(U, d)$  に対して
  - $F(U, d)$  は  $U$  内の利得の組であり、
  - $F(U, d)$  は個人合理的である。
  - $F_1(U, d)$  が個人1の効用、 $F_2(U, d)$ が個人2の効用

- 先の条件を満足するような交渉解  $F$  は無数に存在している。
- それでは、どのような  $F$  であれば、合理的主体の交渉の結果を表すようなルールとしてふさわしいだろうか。
- この点を、**公理的なアプローチ**により考察することにする。



# 公理的アプローチ

- 先の条件を満足するような  $F$  は無数に存在する。
- では、これを、ある条件を満足するような  $F$  としたらどうであろうか。当然、これにより  $F$  の選択肢は減少することになる。
- さらに条件を加えれば、さらに  $F$  の可能性は狭まることになる。
- このように、 $F$  の条件を加えていくことにより、唯一つの  $F$  を探すようなアプローチを公理的アプローチという。

# 性質①: 交渉解のパレート最適性

- 交渉解  $F$  は次の条件を満足するとき、パレート最適であるという。
  - 任意の交渉問題  $(U, d)$  に対して、 $F(U, d)$  は  $U$  におけるパレート最適な利得の組み合わせである。
- つまり、交渉解は常にパレートフロンティア上の利得の組を選択する。

## 性質②: 交渉解の対称性

- 交渉解  $F$  は次の条件を満足するとき、対称であるという。
  - 任意の対称な交渉問題  $(U, d)$  に対して、
  - $F_1(U, d) = F_2(U, d)$
- つまり、交渉解は、仮に交渉問題が対象であるならば、両者の効用が等しいことを要求する。

## 性質③: 交渉解の正一次変換からの独立性

- 交渉解  $F$  は次の条件を満足するとき、正一時変換から独立であるという。
  - 任意の交渉問題  $(U, d)$  と
  - $(U, d)$  の正一次変換として得られる交渉問題  $(U', d')$  に対して、

$$u'_1 = \alpha_1 u_1 + \beta_1, \quad u'_2 = \alpha_2 u_2 + \beta_2,$$

$$d'_1 = \alpha_1 d_1 + \beta_1, \quad d'_2 = \alpha_2 d_2 + \beta_2,$$

以下が成り立つ。(  $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$  )

$$F_1(U', d') = \alpha_1 F_1(U, d) + \beta_1, \quad F_2(U, d) = \alpha_2 F_2(U, d) + \beta_2$$

- つまり、交渉解が選択する交渉の結果は、効用の尺度が変換されたとしても影響されない。

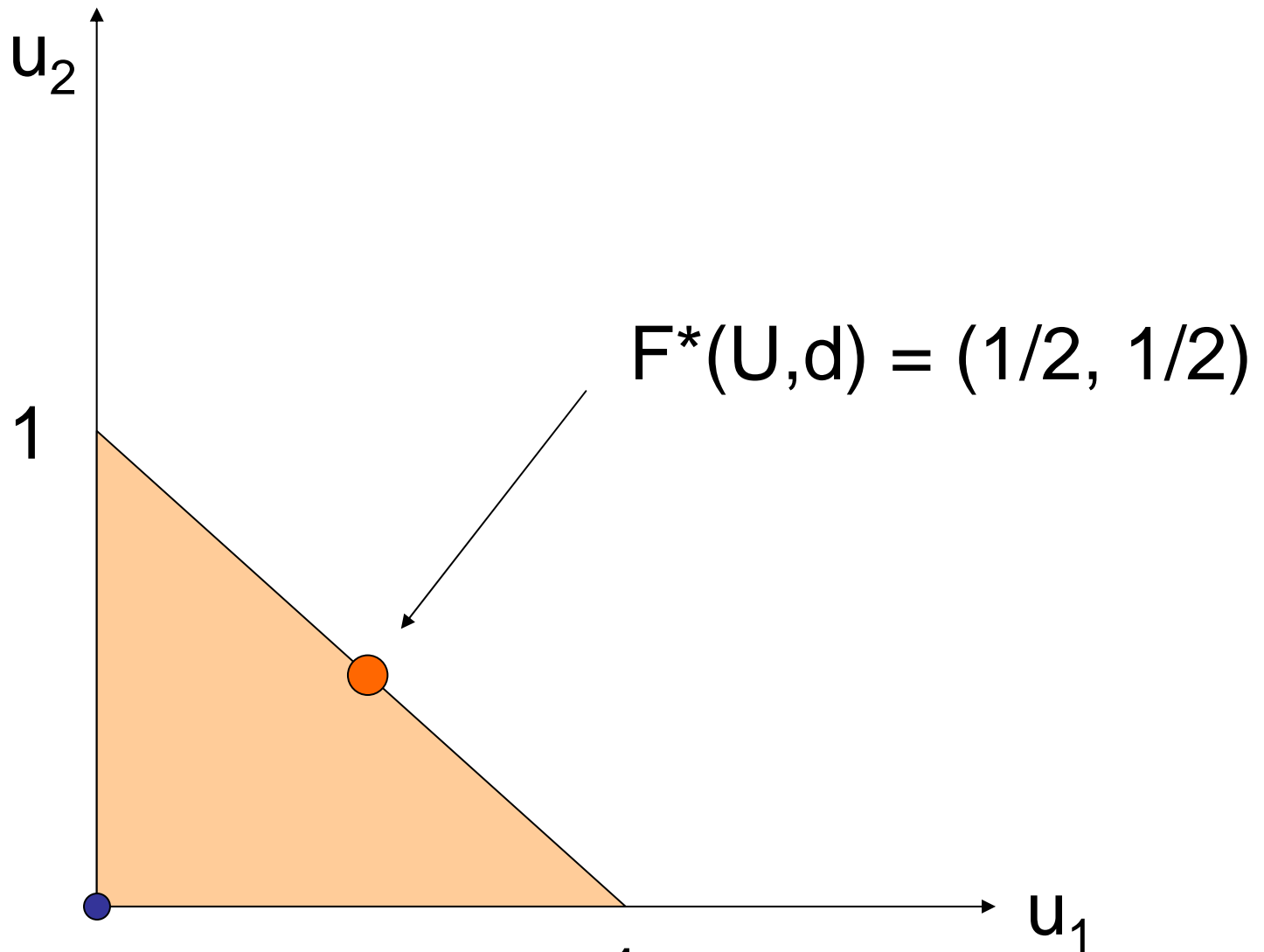
# 性質④: 交渉解の無関係な選択肢からの独立性

- 交渉解  $F$  は次の条件を満足するとき、無関係な選択肢から独立であるという。
  - 任意の交渉問題  $(U, d)$  と
  - $U$  を包含するような集合  $T$  に対して、
  - 仮に  $F(T, d)$  が  $U$  内の利得の組み合わせであるならば、 $F(U, d)$  は  $F(T, d)$  と一致する。
- つまり、交渉解が選択する交渉の結果は、無関係な選択肢が削除されたとしても影響されない。

# Nash 解

- 定理: パレート最適性、対称性、正一次変換からの独立性、無関係な選択肢からの独立性を満足するような唯一の交渉解が存在する。
- その交渉解とは、任意の交渉問題  $(U, d)$  に対して、  
$$(u_1 - d_1) \times (u_2 - d_2)$$
  
を最大化するような  $U$  内の効用の組を選択するようなものである。
- このような交渉解を Nash 解とよぶ。  $F^*$  と書く。

# 練習



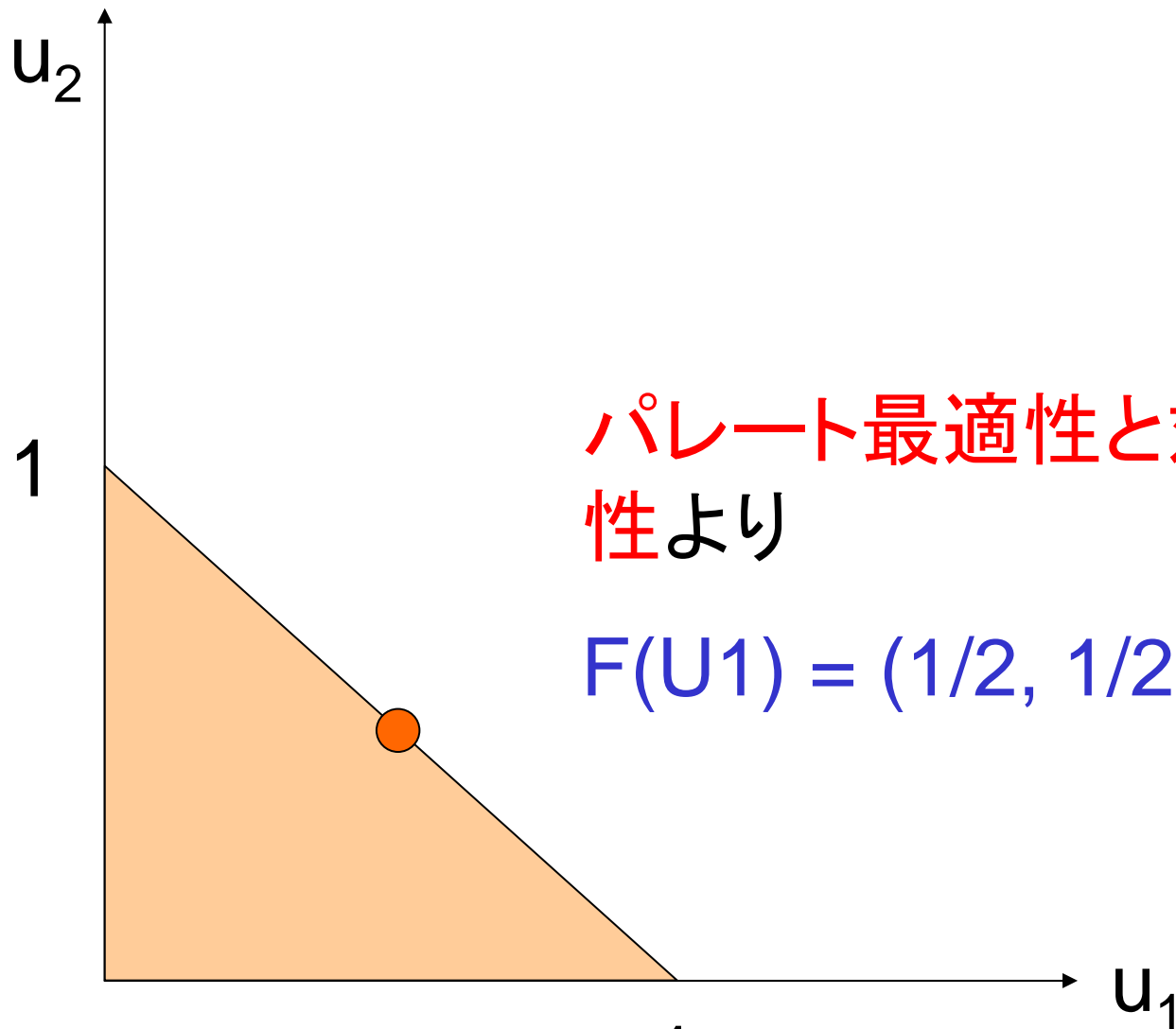
# 定理の証明

- では定理の証明にはいろう。
- ここではおおよその直感を説明する。
- 問題を簡単にするために、交渉の不一致点  $d$  は  $d = (0, 0)$  に固定する。
- つまり、交渉問題は実現可能集合  $U$  だけで特定化されることになる。
- このとき Nash 解は、単に二人の効用の積を単純化するような効用の組となる。



- 定理を証明するためにすべきことは、
  - 四つの条件を満足するようなものが唯一つ Nash 解であること、と
  - Nash 解が実際に四つの条件を満足すること
- を示すこと
- ここで説明するのは前半だけを説明する。
- つまり、交渉解  $F$  が四つの条件を満足するとき、それは効用積を最大化するようなルールであることを示す。

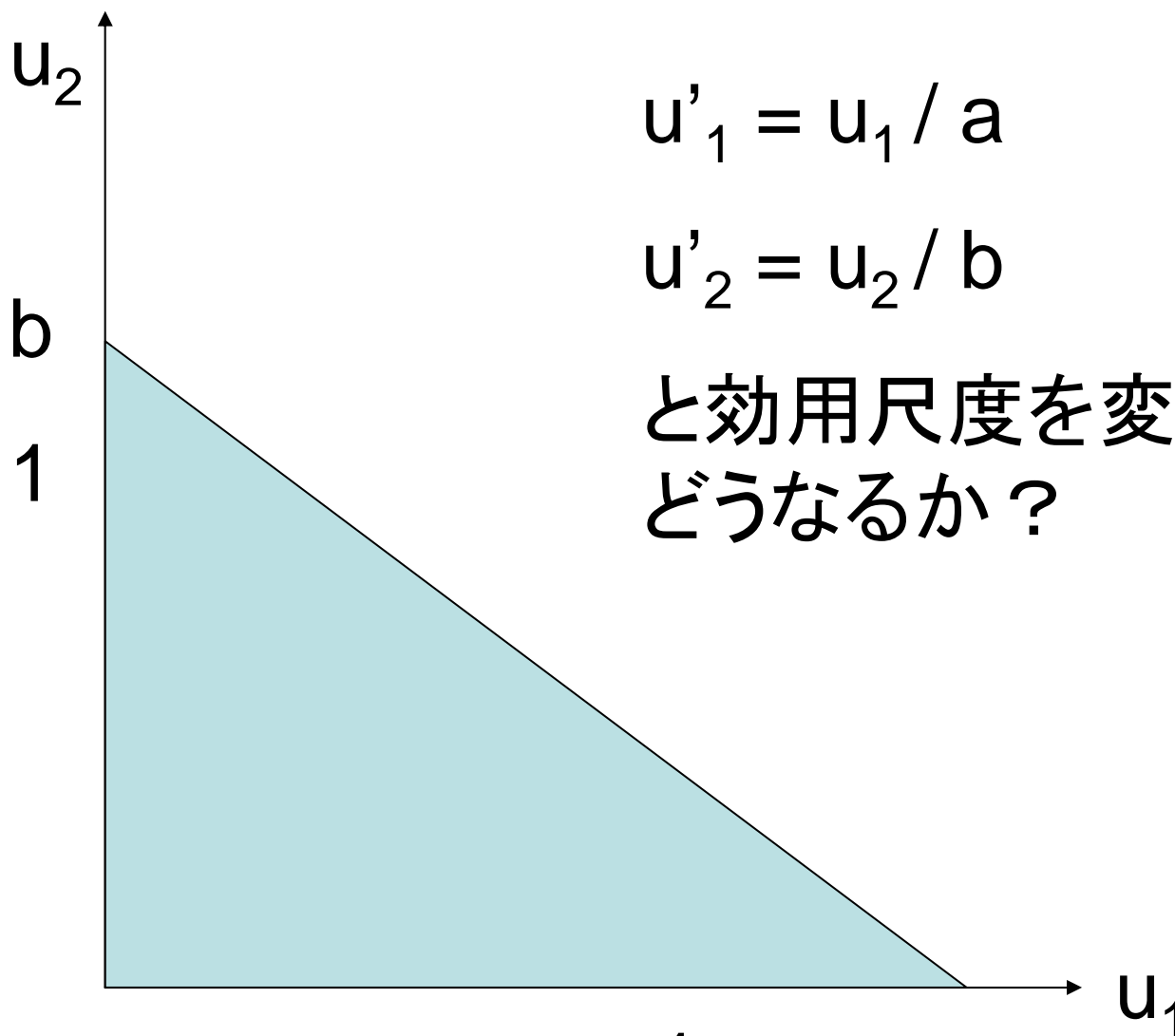
# (1) パレートフロンティアが45度線 ( $U^1$ )



パレート最適性と対称性より

$$F(U^1) = (1/2, 1/2)$$

## (2) パレートフロンティアが直線 ( $U^2$ )

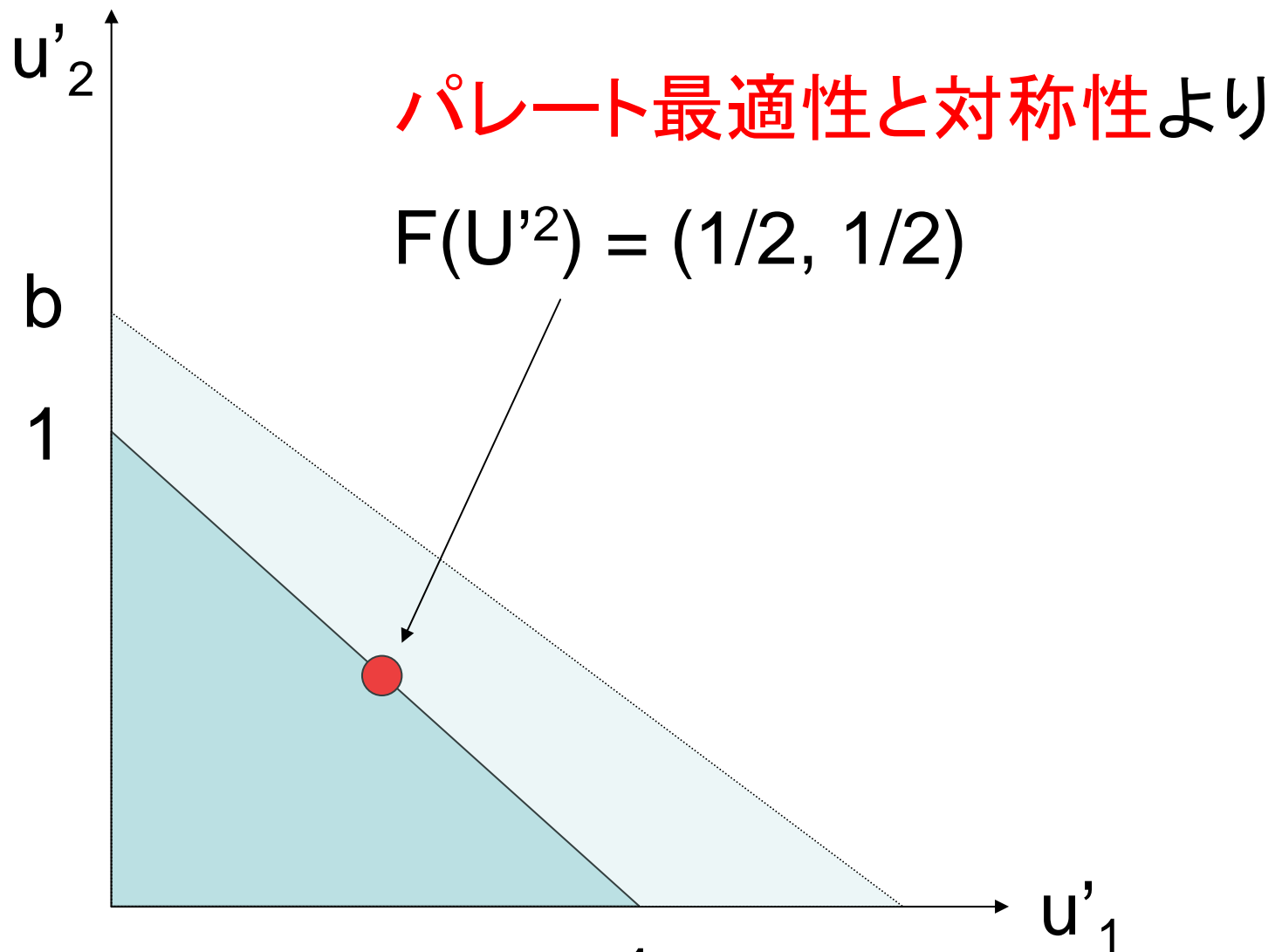


$$u'_1 = u_1 / a$$

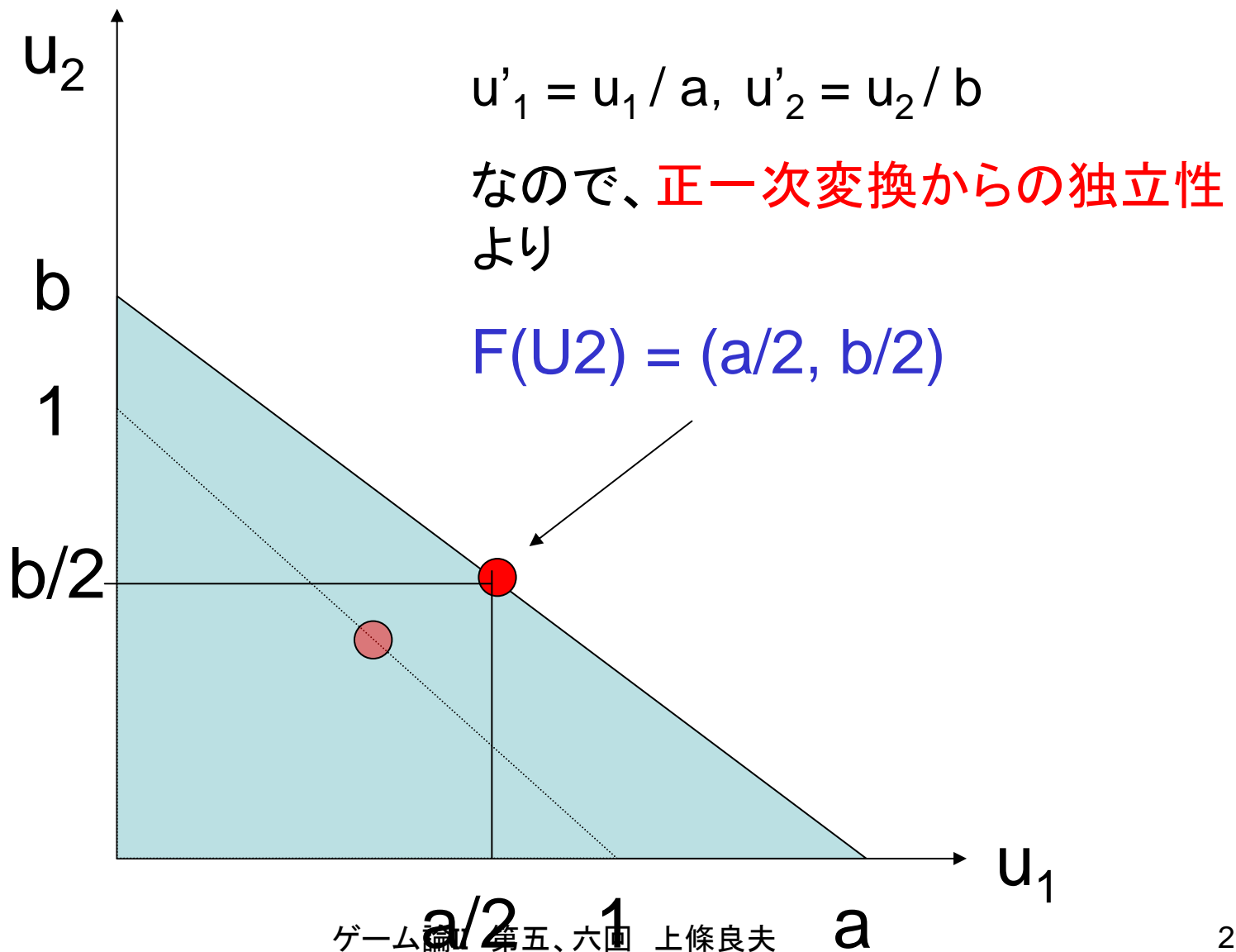
$$u'_2 = u_2 / b$$

と効用尺度を変えると  
どうなるか？

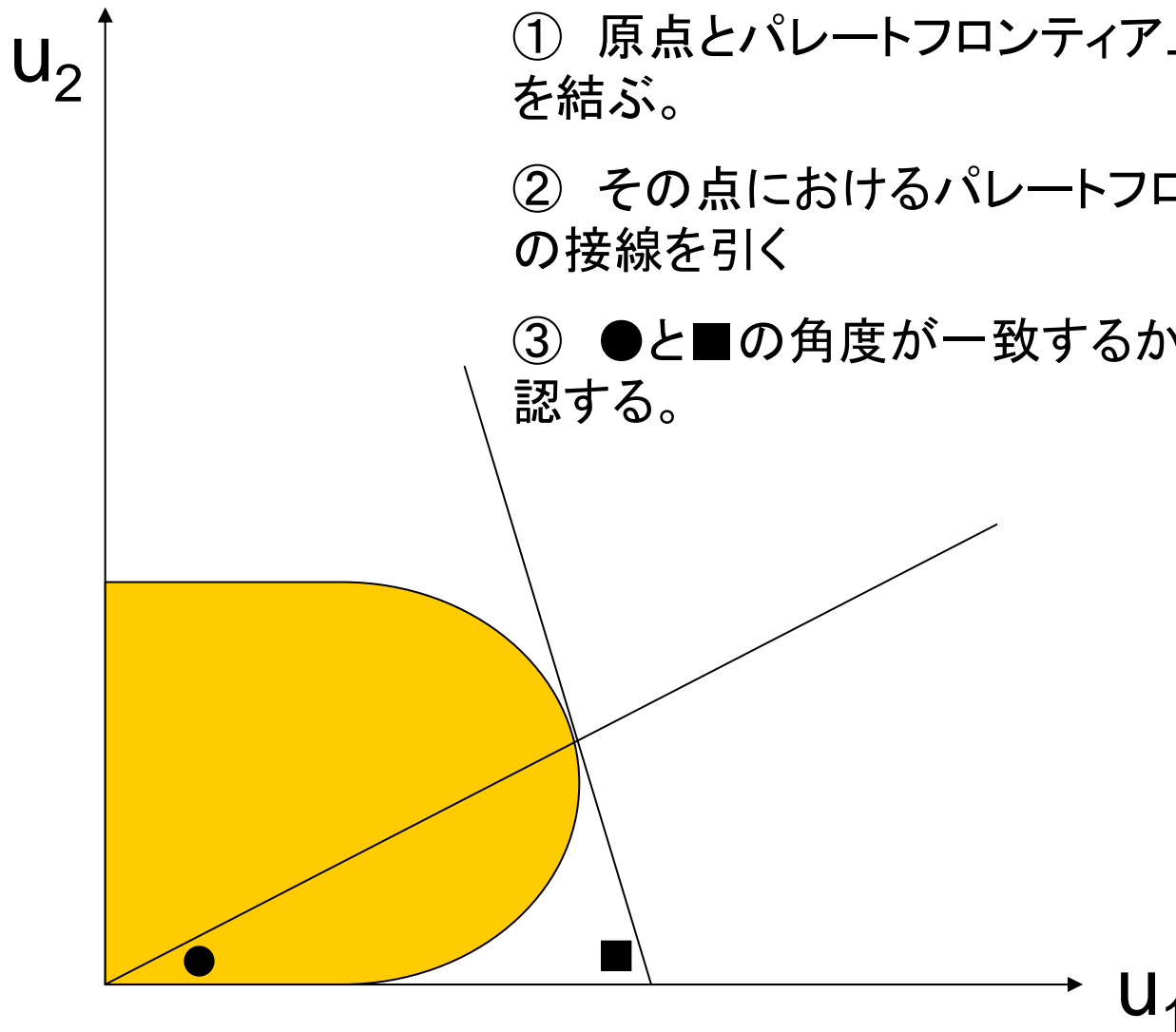
## (2) パレートフロンティアが直線



## (2) パレートフロンティアが直線

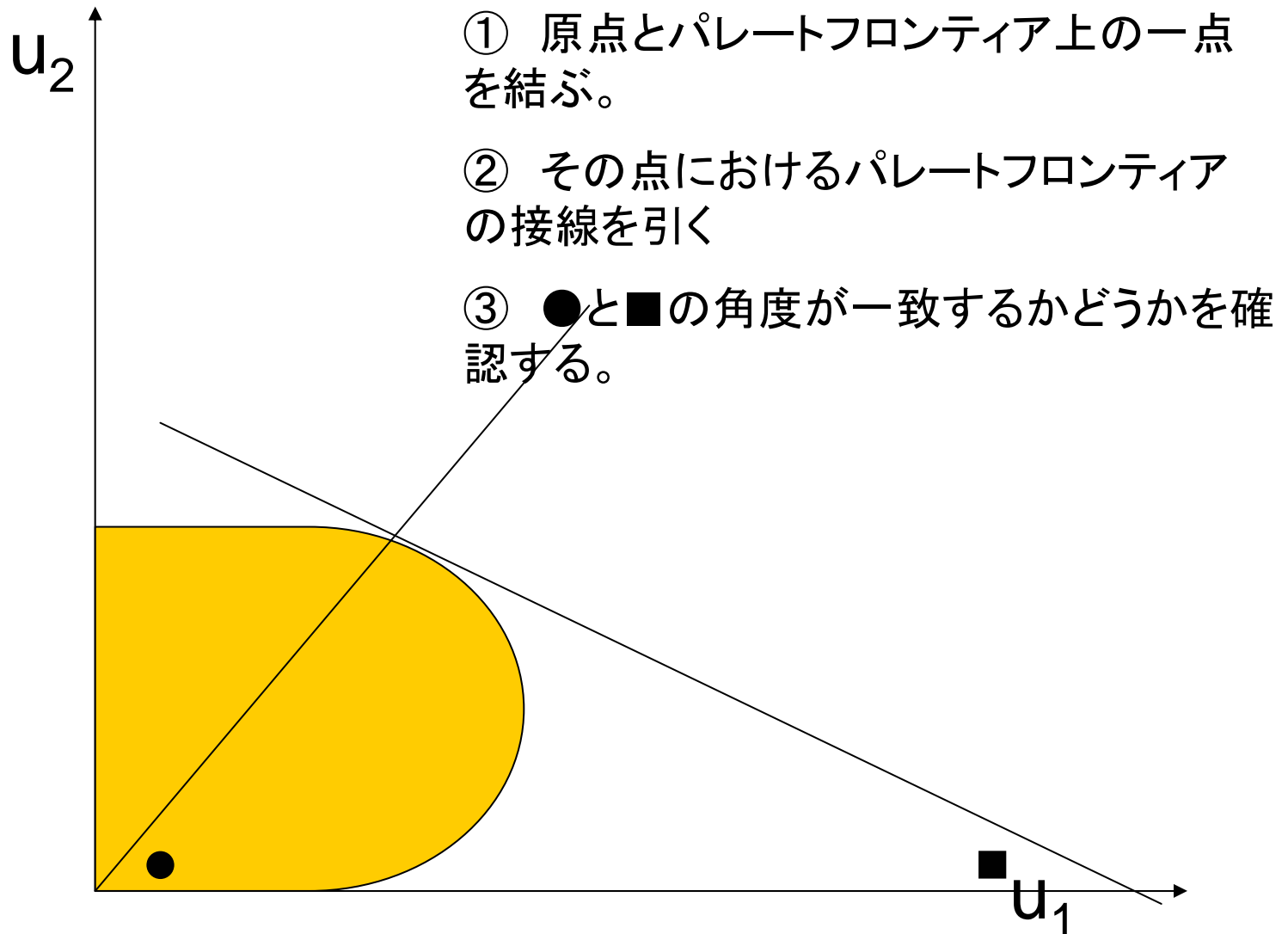


### (3) パレートフロンティアが曲線 ( $U^3$ )

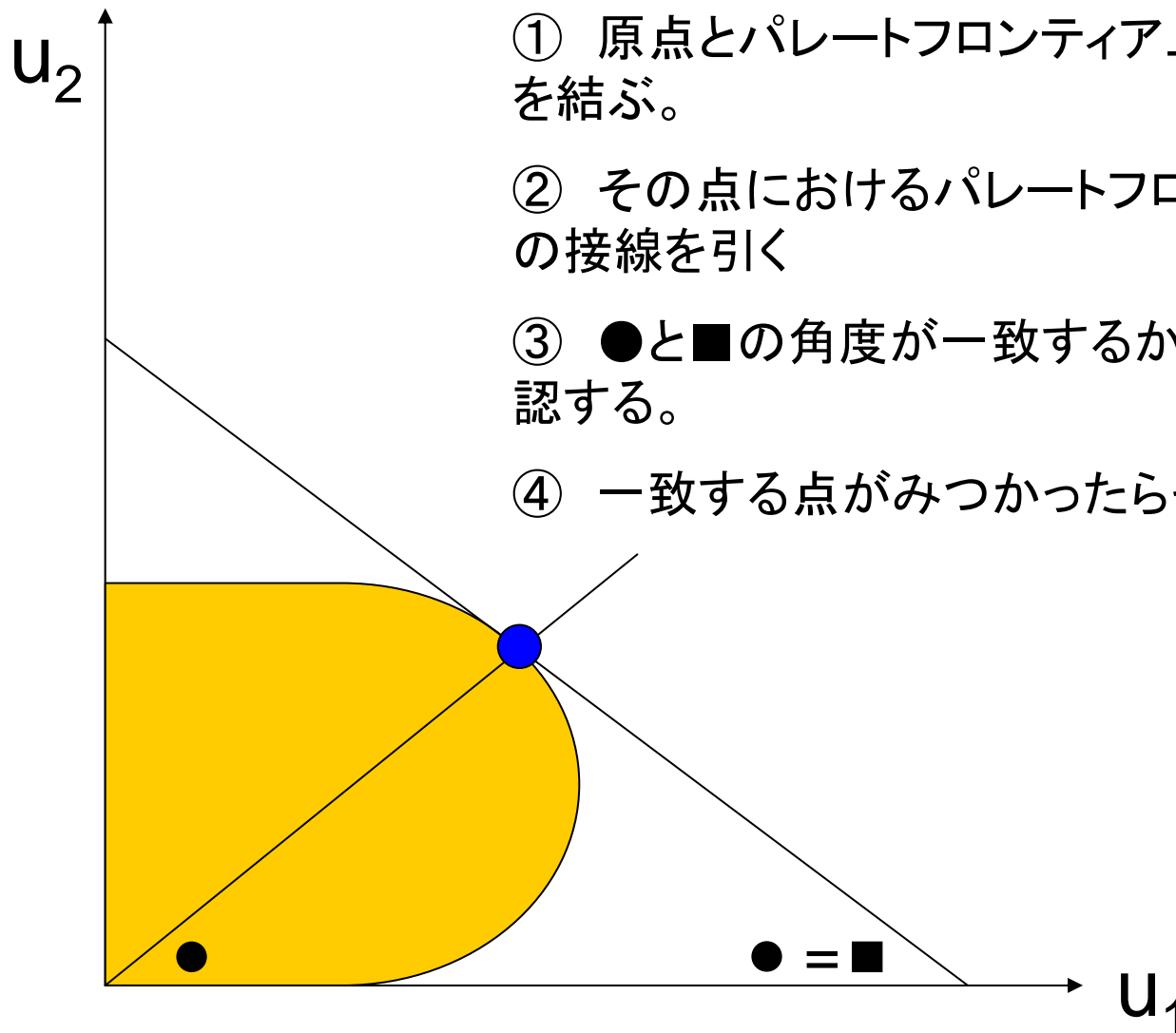


- ① 原点とパレートフロンティア上の一点を結ぶ。
- ② その点におけるパレートフロンティアの接線を引く
- ③ ●と■の角度が一致するかどうかを確認する。

### (3) パレートフロンティアが曲線



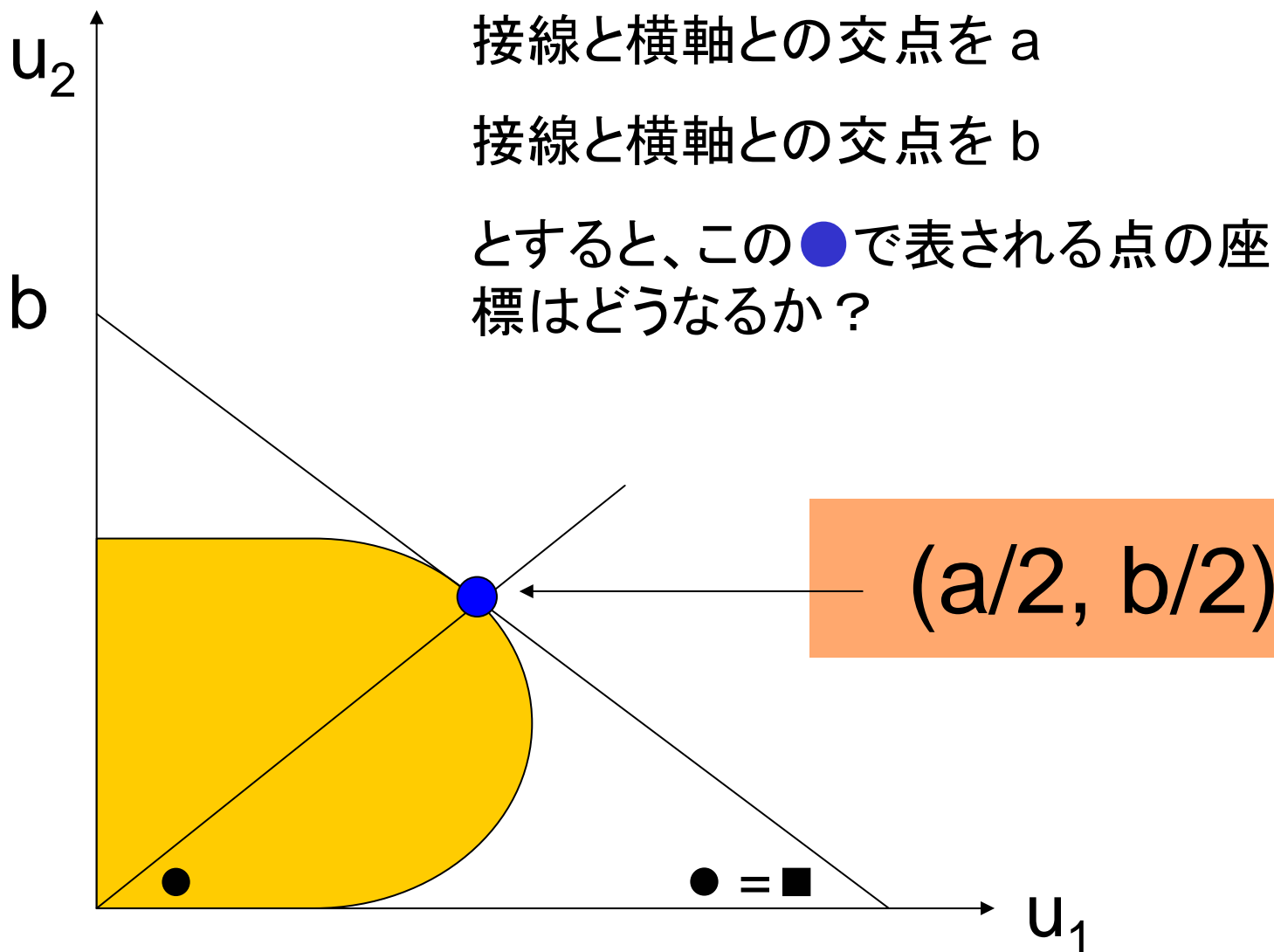
### (3) パレートフロンティアが曲線



- ① 原点とパレートフロンティア上の一点を結ぶ。
- ② その点におけるパレートフロンティアの接線を引く
- ③ ●と■の角度が一致するかどうかを確認する。
- ④ 一致する点がみつかったらそこに注目



### (3) パレートフロンティアが曲線

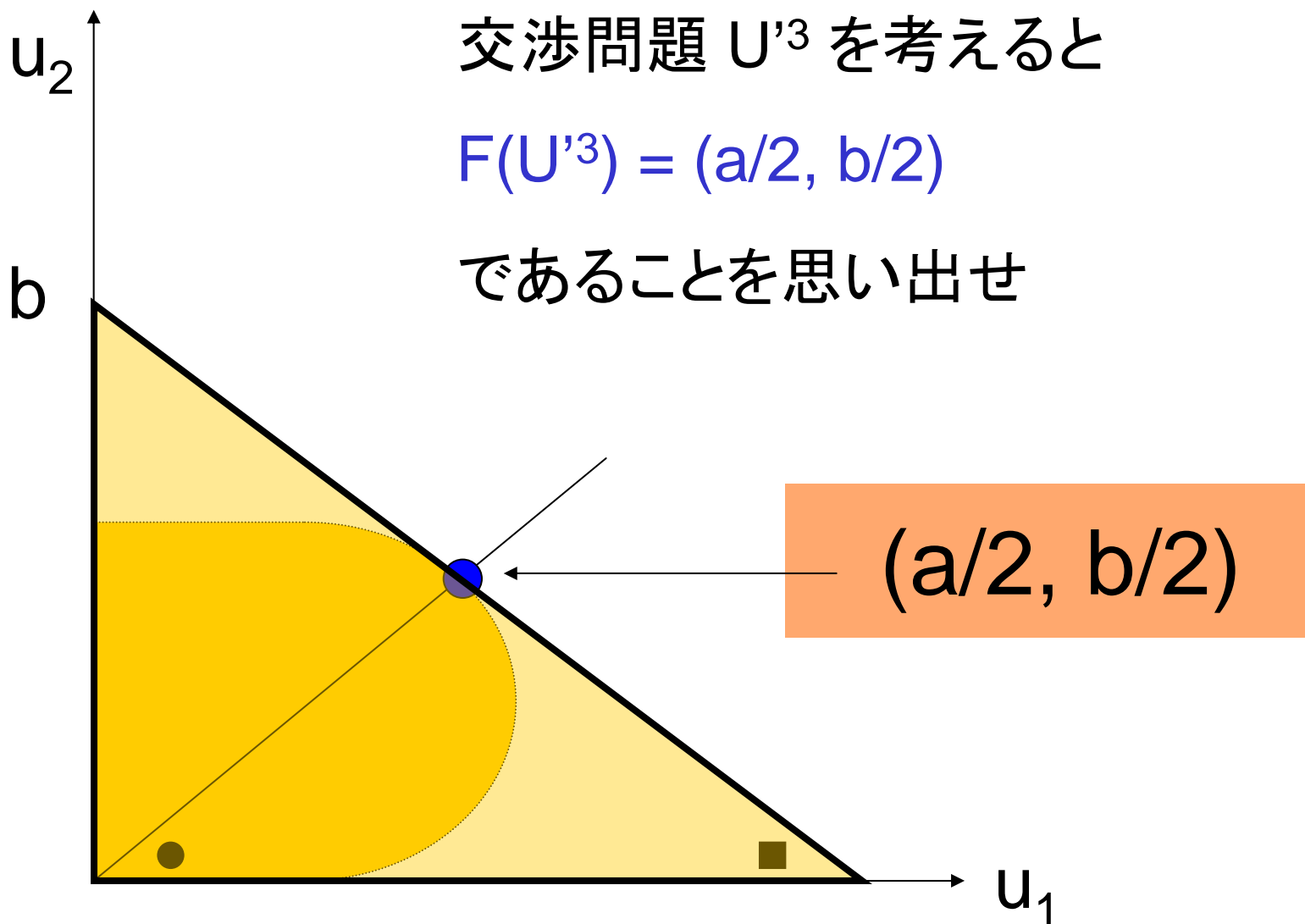


### (3) パレートフロンティアが曲線

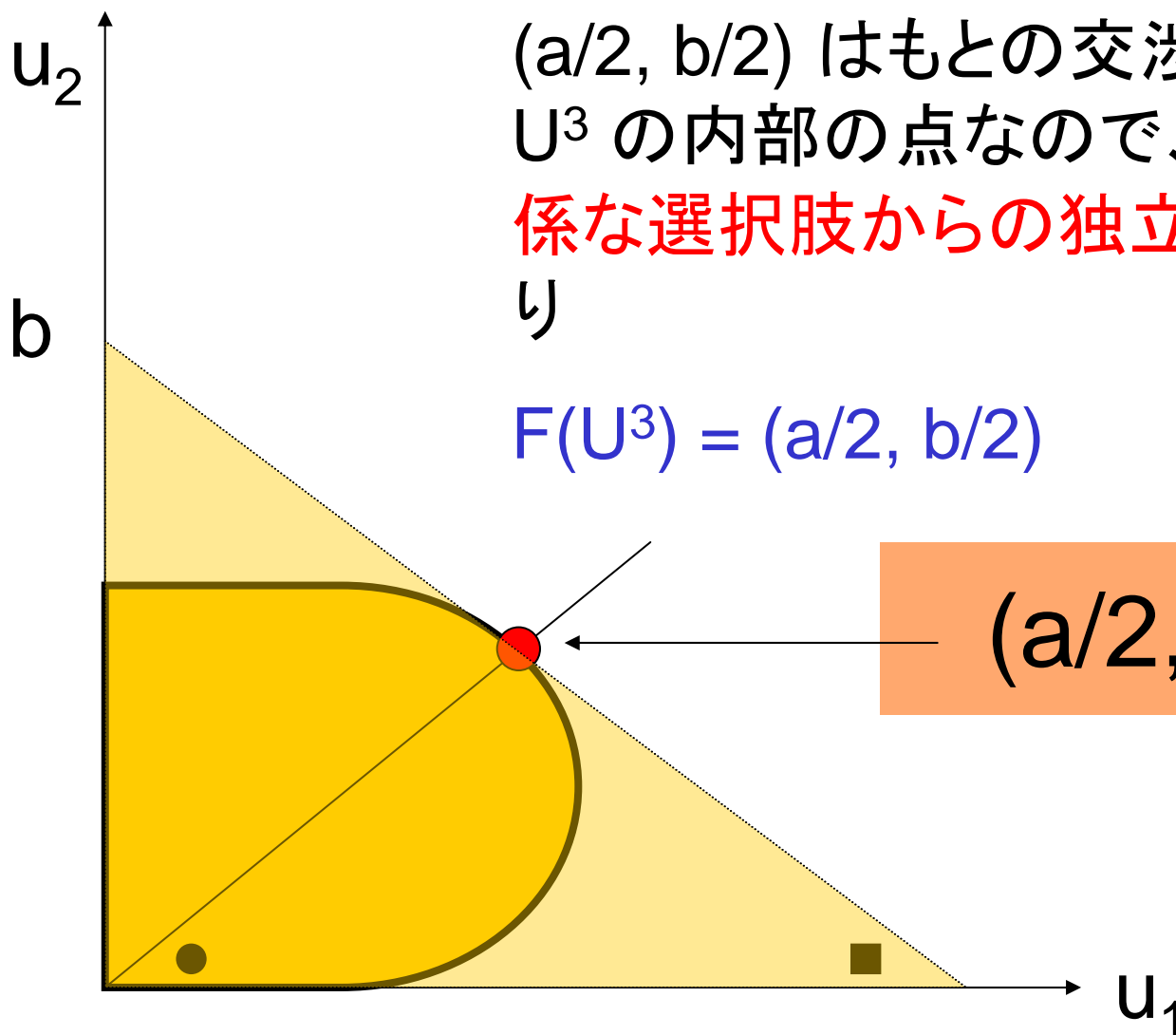
交渉問題  $U^3$  を考えると

$$F(U^3) = (a/2, b/2)$$

であることを思い出せ



### (3) パレートフロンティアが曲線

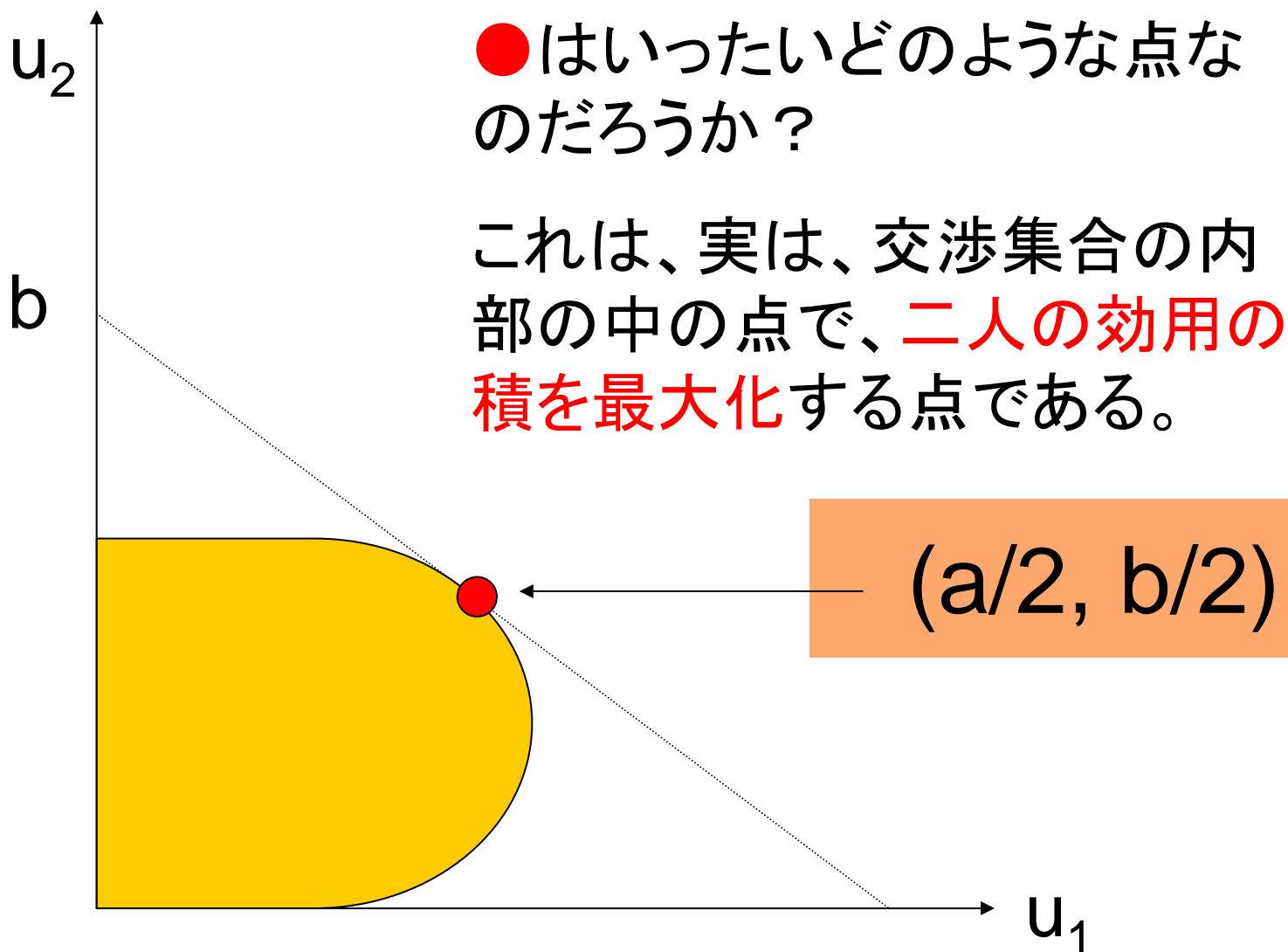


$(a/2, b/2)$  はもとの交渉問題  $U^3$  の内部の点なので、無関係な選択肢からの独立性により

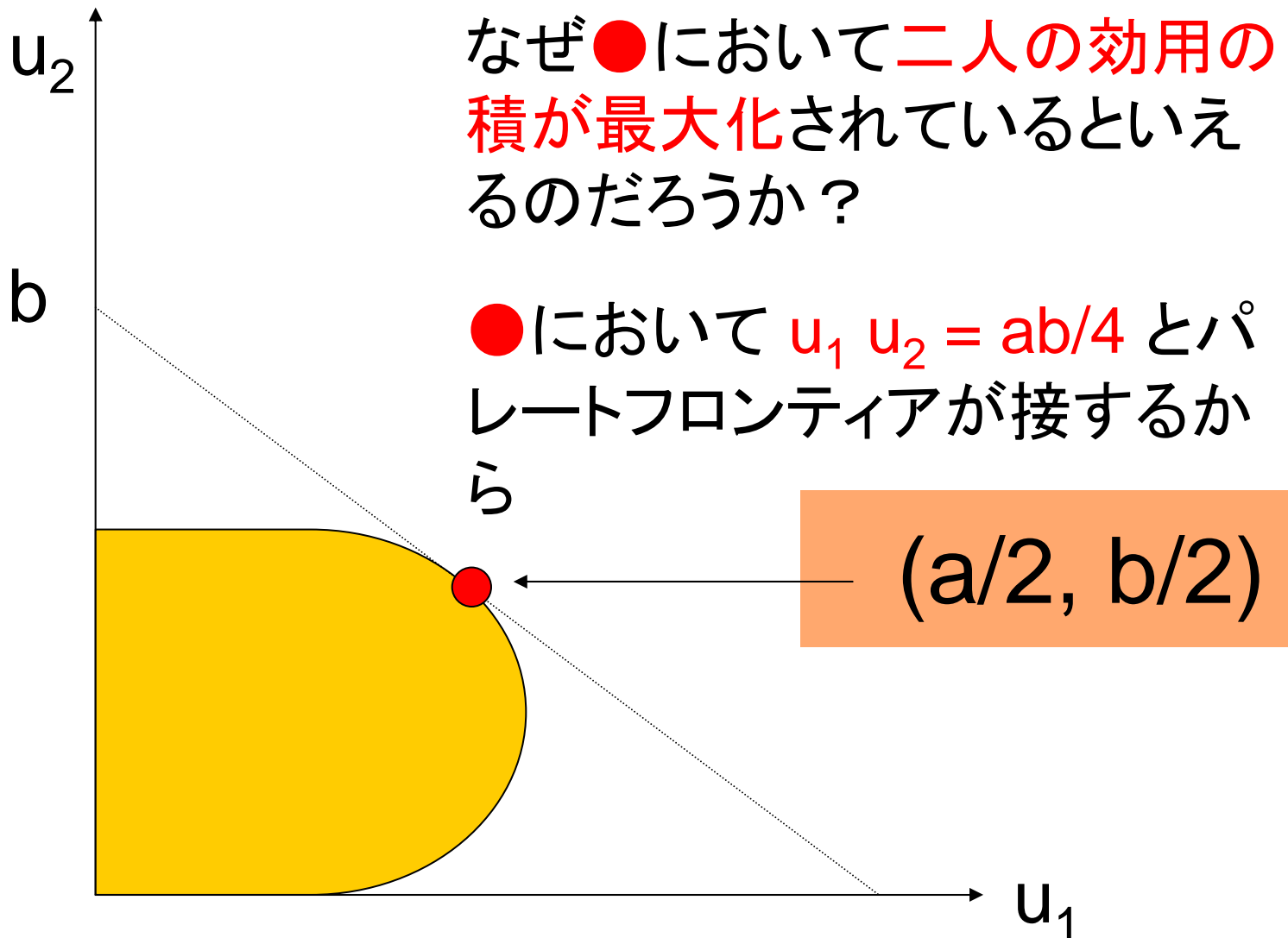
$$F(U^3) = (a/2, b/2)$$

$(a/2, b/2)$

### (3) パレートフロンティアが曲線



### (3) パレートフロンティアが曲線



# 補足

- 定理の正確な証明については、例えば、岡田章『ゲーム理論』などを参照せよ。
- また、交渉問題の定式化についてもここでは詳細には説明しなかった。
  - 実際には、 $U$  が有界閉集合かつ凸集合であることが要求される。

# 連絡事項

- 12月7日には交渉の範囲内で、中間試験を行う。
- 中間試験は、テキスト・ノート・プリントの持ち込みを認める。ただし、コンピュータの電源は入れてはいけない。
- 試験時間は30分程度を予定している。
- 定期試験は、2月1日

# 宿題

- スライド5枚目で、例としてとりあげた問題における Nash 解を求めよ。