ゲーム論Ｉ 第四回

上條　良夫

講義のキーワード

- 弱支配される戦略の繰り返し消去とナッシュ均衡
- 序数的効用と基数的効用
- 純戦略（純粋戦略）と混合戦略
- ナッシュ均衡の存在

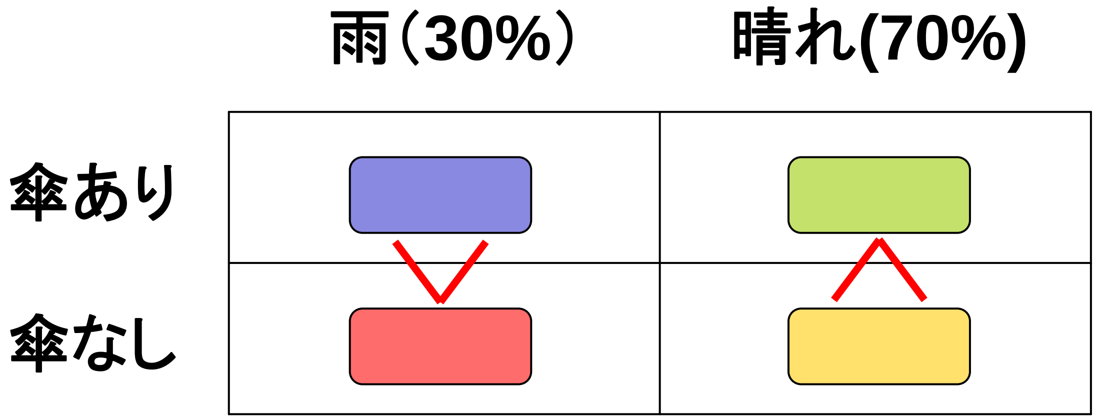
Supplementary Question

序数的効用と基数的効用

- 序数的効用
  - 選好の順序だけが重要。
  - 数字そのものには意味がない
- 基数的効用
  - 数字は選好の順序だけではなく、選好の強度も表す。

不確実性の下での選択

- 確率30%で今日は雨、確率70%で晴れ、の場合、傘を持っていくべきか
  - あなたの選好の順序は
  - (晴れ、傘なし) ＞ (雨、傘あり) ＞ (晴れ、傘あり) ＞ (雨、傘なし)



不確実性の下での選択

- 確率30%で今日は雨、確率70%で晴れ、の場合、傘を持っていくべきか
- この問題に答えることは、選好の強度を考慮しない限り難しい。
- 基数的効用（利得）が必要

	雨（30%）	**晴れ(70%)**
傘あり		
傘なし		

不確実性の下での選択

- セルの中の数字は、プレイヤーの基数的効用（利得）を表している。
- 期待効用（利得）最大化を仮定する。
  - 傘あり・・・ 8 × 0.3 + 5 × 0.7 = 5.9
  - 傘なし・・・ 2 × 0.3 + 10 × 0.7 = $\boxed{7.6}$

	雨（30%）	晴れ(70%)
傘あり	8	5
傘なし	2	10

混合戦略

- これまでの講義は、プレイヤーは複数の選択肢の中からどれか一つの戦略を選択するとしてきた。
- ここで新たに、複数の戦略を、確率的に選択する、というような戦略を扱うことにする。
- 例えば、囚人のジレンマにおいて、確率 0.7 で「協力」を選び、確率 0.3 で「裏切り」を選ぶ、というようなことを考えるのである。
- このように、確率的に戦略を選ぶような戦略のことを混合戦略(mixed strategy)とよぶ。
- これと対比して、これまで考えてきたようなある手を確実に選択するというような戦略のことを純戦略（純粋戦略）とよぶ。

混合戦略

- 混合戦略の考え方
  – ゲーム開始前に、自分のとる混合戦略を決定する。
  – ゲームが行われるごとに、さいころなどにより自分の戦略を決める。

- 混合戦略を考える際の重要事項
  – 相手と自分のランダムデバイスは独立

- 以下のようなコインあわせゲームを考えよう。
  - コインの裏表がそろったらプレイヤー1の勝ち
  - そろわなかったらプレイヤー2の勝ち
- このゲームには純戦略だけを考える場合にはナッシュ均衡は存在しない。
- では、混合戦略を考えるとどうだろうか？

	表	裏
表	1, -1	-1, 1
裏	-1, 1	1, -1

- 混合戦略の表現方法。
- プレイヤー1の混合戦略は、(p, 1-p) と表される。
  - 0 <= p<= 1
  - 確率 p で「表」を選び、確率 1-p で「裏」を選ぶ
- 同様に、プレイヤー2の混合戦略を (q, 1-q) と表す。

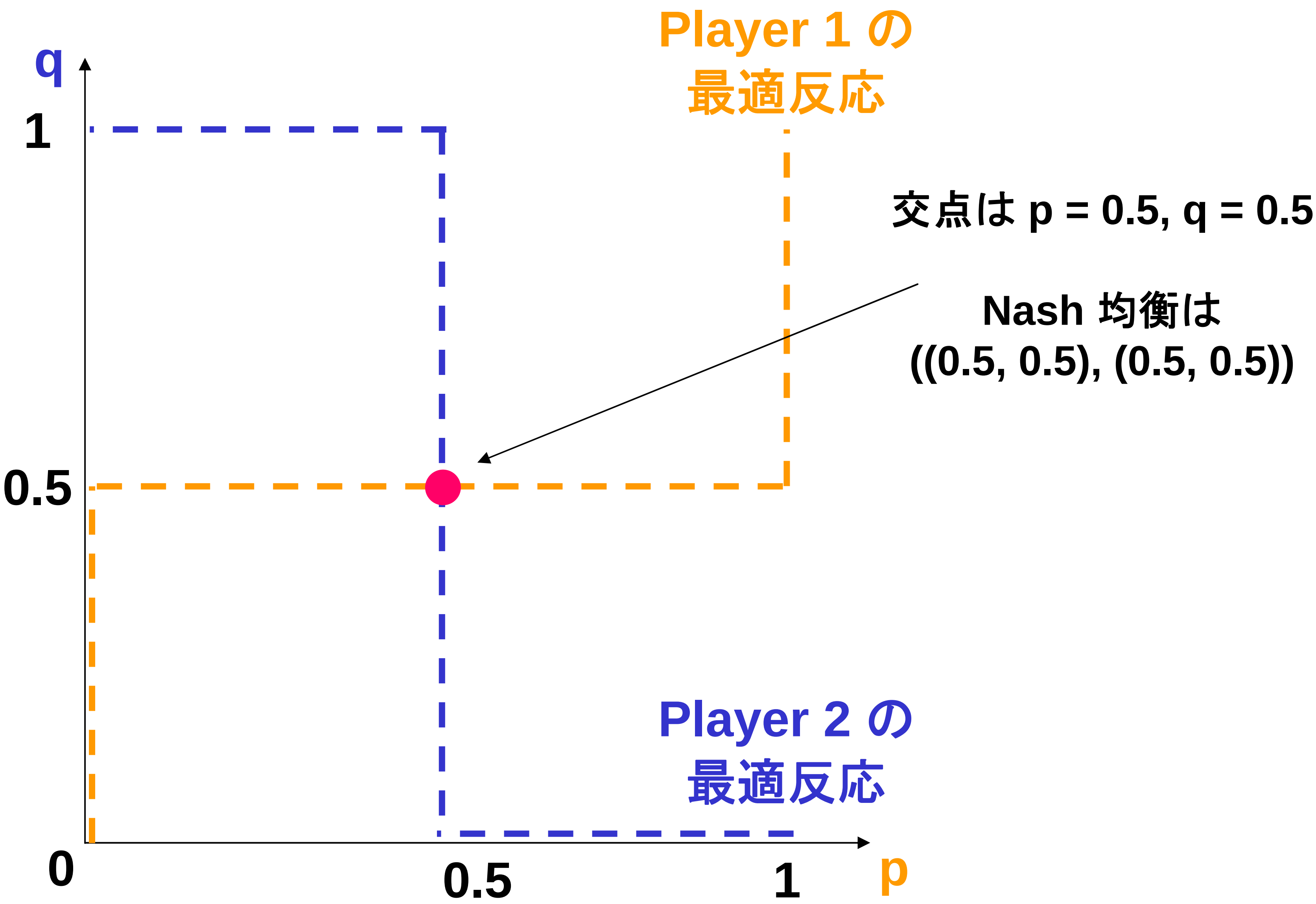
	q 表	(1-q) 裏
p 表	1, -1	-1, 1
(1-p) 裏	-1, 1	1, -1

- Nash 均衡の導出
  - 純戦略のときと同じように、相手戦略に対する最適反応を考えていく。
- 混合戦略の場合は次のように考えていけばよい。
  - プレイヤー1の最適反応を考える
  - プレイヤー2の混合戦略 (q, 1-q) に対して、プレイヤー1は「表」を取るべきか「裏」をとるべきかをチェックしていく。
  - 当然、プレイヤー1の最適反応は q の値に応じて変化する。よって、プレイヤー1の最適反応は q に関する関数として表現できる。

- 同じように、プレイヤー2の最適反応は、p に関する関数として表現できる。

- プレイヤー1とプレイヤー2の最適反応関数を、横軸を p, 縦軸を q とするグラフに書き込み、二つの最適反応関数の交点を求める。

- この交点では、互いに相手戦略に対する最適反応となっており、それゆえ、交点が表す戦略の組がNash 均衡である。


Player 1 の
最適反応
q
1
交点は p = 0.5, q = 0.5
Nash 均衡は
((0.5, 0.5), (0.5, 0.5))
0.5
Player 2 の
最適反応
0
0.5
1
p

混合戦略まで考えて、Nash 均衡を求めてみよう1

- 調整ゲーム

		q 左	(1-q) 右
p	左	4, 4	0, 0
(1-p)	右	0, 0	3, 3

混合戦略まで考えて、Nash 均衡を求めてみよう2

- 囚人のジレンマ

		q 左	(1-q) 右
p	左	4,　4	1,　6
(1-p)	右	6,　1	3,　3

Nash 均衡の存在

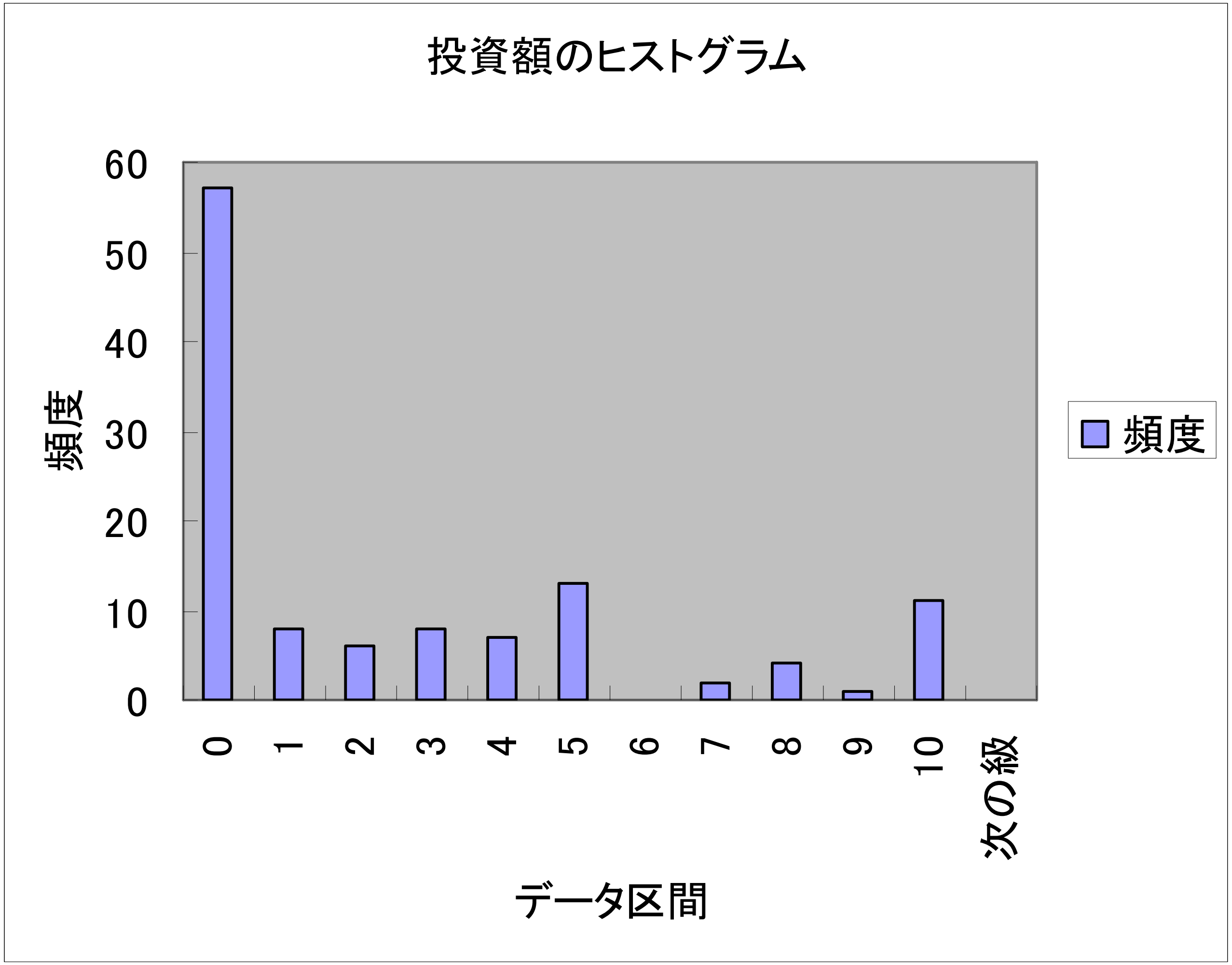
- 純戦略だけを考えているときには、Nash 均衡は存在しないケースがある。
- しかし、混合戦略まで考えると必ず Nash 均衡が存在することが示せる（純戦略の数が有限個の場合）。
- わかりやすい説明は、「入門ゲーム理論：戦略的思考の科学」 佐々木宏夫

休憩

- 前回のアンケートの結果
  - 試験一発勝負
  - 中間試験
  - レポート

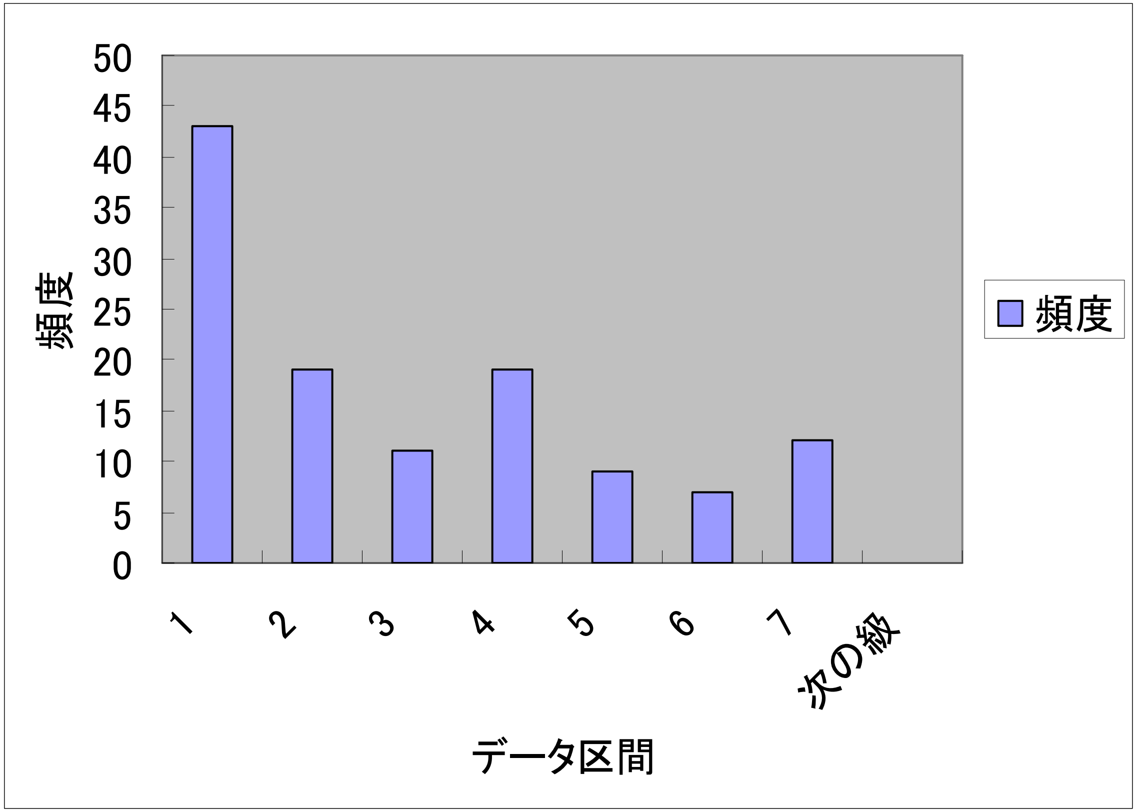
- 成績の「得点」をいくら投資する？

社会的ジレンマ

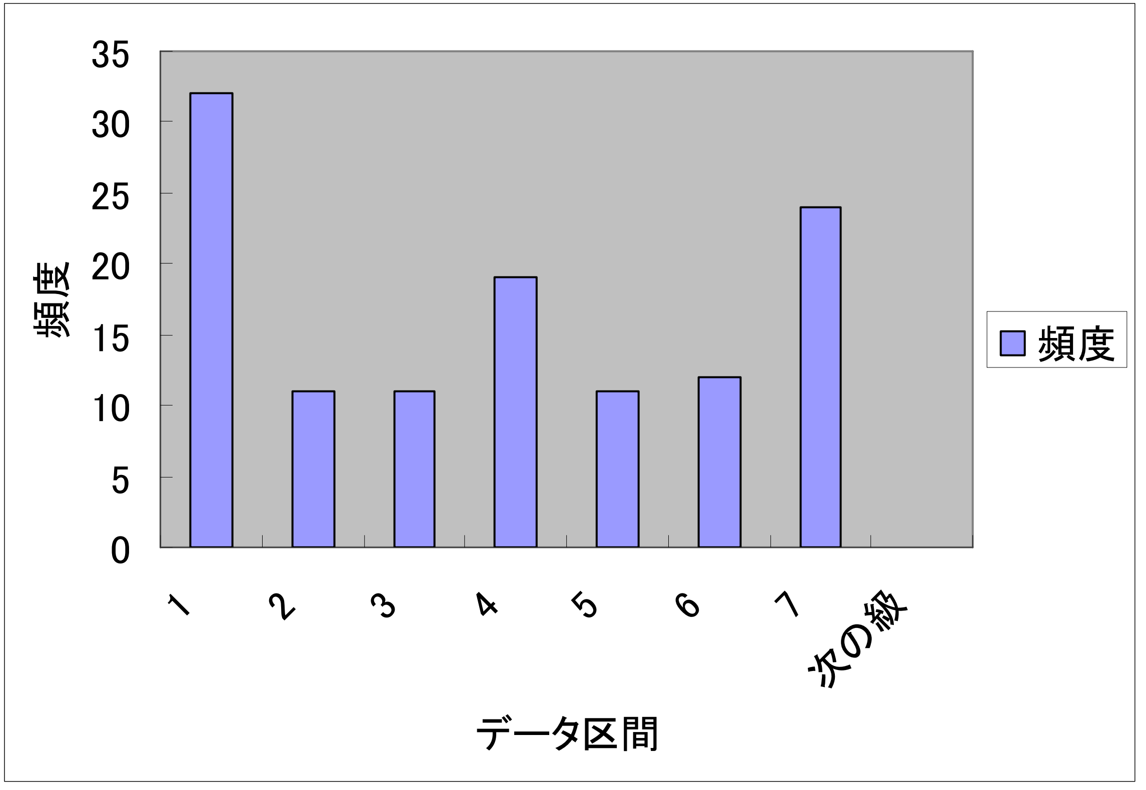


サンプル数　120
平均　2.58

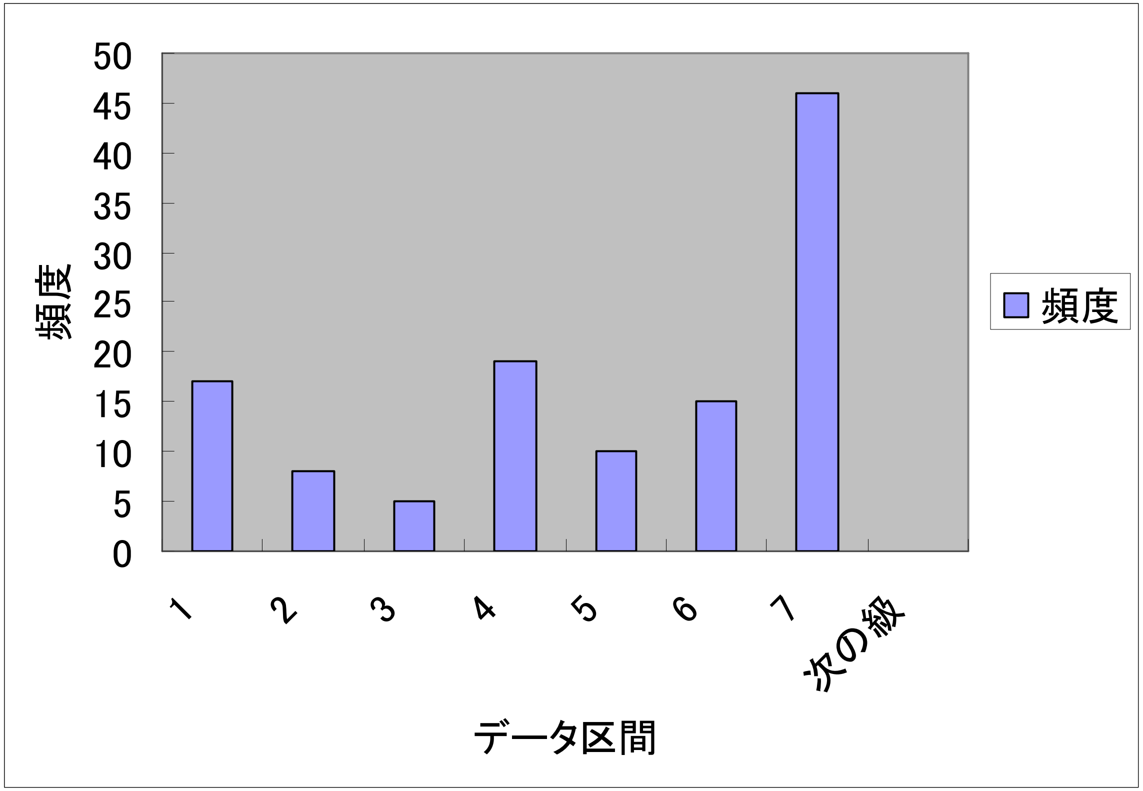
成績評価は定期試験の一発勝負がよいか？



中間テストをやったほうがよいか



レポートを出したほうがよいか



じゃんけんゲームの Nash 均衡

- 皆さんの選択の結果
  - グーに割り当てられた確率の平均　37%
  - チーに割り当てられた確率の平均　33%
  - パーに割り当てられた確率の平均　30%

- よって、パーに確率１を割り振った人が一番得点が高い
  - 勝ち１００点、負け－１００点、あいこ0点として（**ゼロサムゲーム**）、
  - 他の全員と一回ずつ対戦したとすると
  - パーに確率１を割り振った人の得点はおよそ465点

- 興味深い選択･･･グー、チー、パーを等確率で出す。
  - 約20%(24/121)の人が選択
  - 彼らの得点の合計は0点
- **実は、自分が(1/3,1/3,1/3) を選ぶと、相手が何を選んでいようが（どんな混合戦略を選んでいようが）、自分の得点は0である（当然、相手の得点も0である）。**
- よって、(1/3,1/3,1/3)はじゃんけんゲームのマックスミニ戦略となっている。

- さらに興味深い結果･･･実は、このゲームでは、両者とも等確率でグー、チー、パーを選ぶ状態が唯一の Nash 均衡である。

- つまり((1/3,1/3,1/3),(1/3,1/3,1/3)) が唯一の Nash 均衡である。

- なぜだろうか。

- ((1/3,1/3,1/3),(1/3,1/3,1/3)) が Nash 均衡であることの証明。
  - Player 2 が (1/3, 1/3, 1/3) を選んでいるとき、Player 1 のいかなる戦略も期待利得 0 である。
  - よって、Player 1 の混合戦略 (1/3, 1/3, 1/3) は Player 2 の混合戦略 (1/3, 1/3, 1/3) に対する**最適反応**となっている。
  - 当然、逆も成り立つ。つまり、Player 2 の混合戦略 (1/3, 1/3, 1/3) は、Player 1 の混合戦略 (1/3, 1/3, 1/3) に対する最適反応である。
  - よって、互いに最適反応を取り合っている。→ 証明終了

- ((1/3,1/3,1/3),(1/3,1/3,1/3)) が 唯一のNash 均衡であることの証明。
  - 例えば、Player 1 が Nash 均衡において

    (0.6, 0.2, 0.2)
  - という混合戦略を選んでいると仮定する。
  - すると、Player 2 の唯一の最適反応は (0, 0, 1) である（つまり、パー）。
  - Player 1 の (0.6, 0.2, 0.2) は Player 2 の (0, 0, 1) に対する最適反応ではない。最適反応は (0, 1, 0) だから
  - よって、Player 1 が (0.6, 0.2, 0.2) という混合戦略をとるような Nash 均衡は存在しない。

– 似たような理屈は、Player 1 の (1/3, 1/3, 1/3) 以外のいかなる混合戦略について成り立つ。

– つまり、Player 1 が (1/3, 1/3, 1/3) 以外の混合戦略を選んでいるような Nash 均衡は存在しない

– Player 2 についても同様にすれば、Player 2 が (1/3, 1/3, 1/3) 以外の混合戦略を選んでいるような Nash 均衡は存在しないことを示せる。

– つまり、((1/3,1/3,1/3),(1/3,1/3,1/3)) 以外に Nash 均衡は存在しない。→証明終了

- つまり、じゃんけんゲームでは、互いにマックスミニ戦略をとりあうような状態が Nash 均衡である。

- この結果は、２人ゼロサムゲームにおいて一般的に成立する結果である（ミニマックス定理とよばれる）。

次回講義

- これまでの講義で、標準型（戦略型）ゲームの基礎的な概念は一通り学んだ。
- 次回講義では、経済学などへの応用例をいくつか紹介することにする。
  – クールノー競争
  – オークション
- 時間があったら、ミニマックス定理の証明を紹介する。