ゲーム論Ｉ 第十二回

上條　良夫

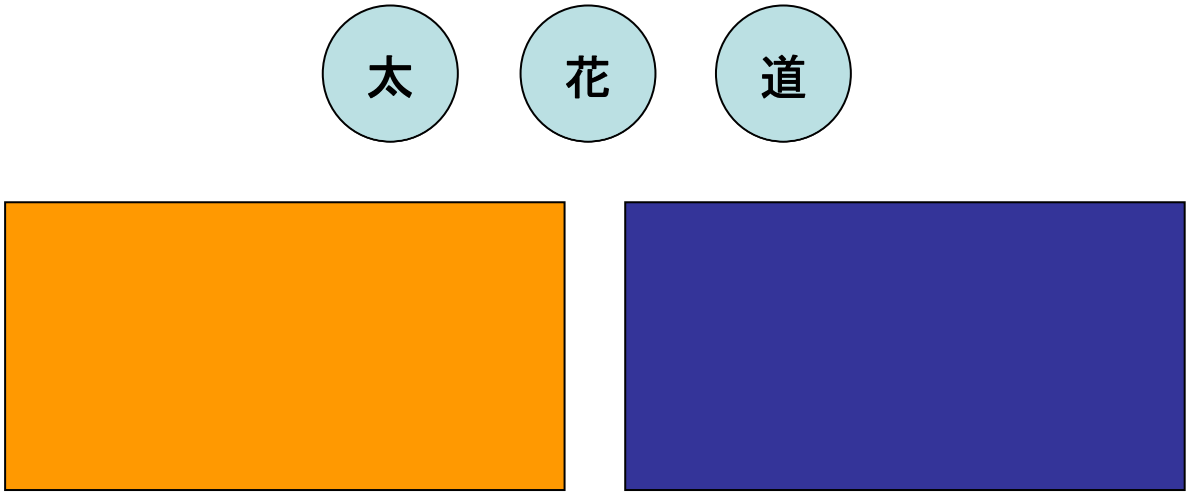
講義のキーワード

- 情報不完備ゲーム（不完備情報ゲーム）
- プレイヤーのタイプ
- ベイジアンナッシュ均衡
- 信念（次回）
- 完全ベイジアン均衡（次回）

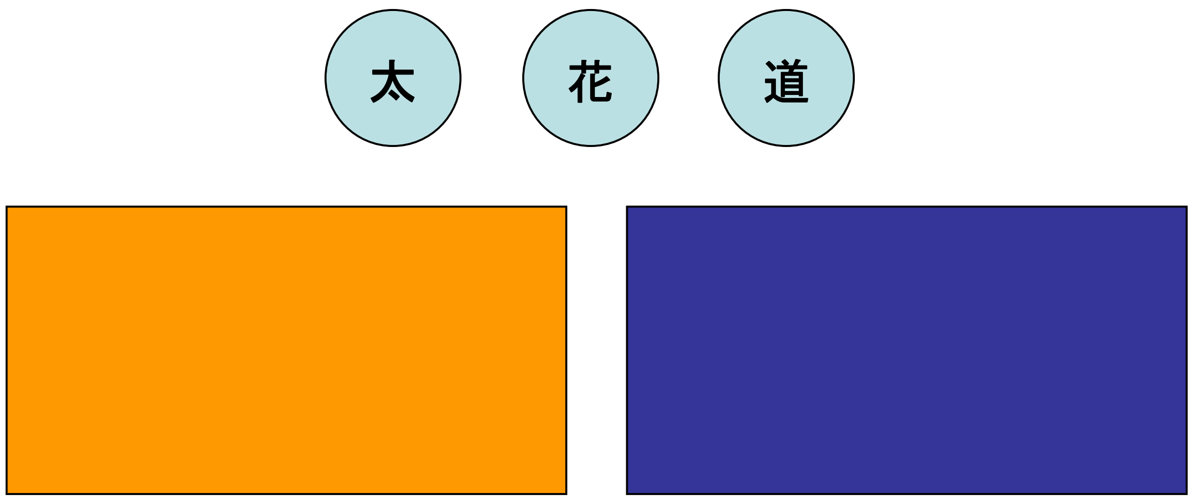
情報の完備性と不完備性

- これまで扱ってきたゲームでは、各プレイヤーは、相手がどのようなプレイヤーであるのか、ということを熟知していた。
- 今回新たに扱うゲームでは、相手が（場合によっては自分が）どのようなプレイヤーであるのかがはっきりしない状況を扱う。
- 前者のような、相手に対して不確実性のないゲームのことを情報完備ゲームとよび、後者のように、相手（や自分）に対して不確実性があるゲームを情報不完備ゲームとよぶ。（この定義は少々不正確だが、情報不完備ゲームがどのようなものかをつかむ上ではこれで十分である。）

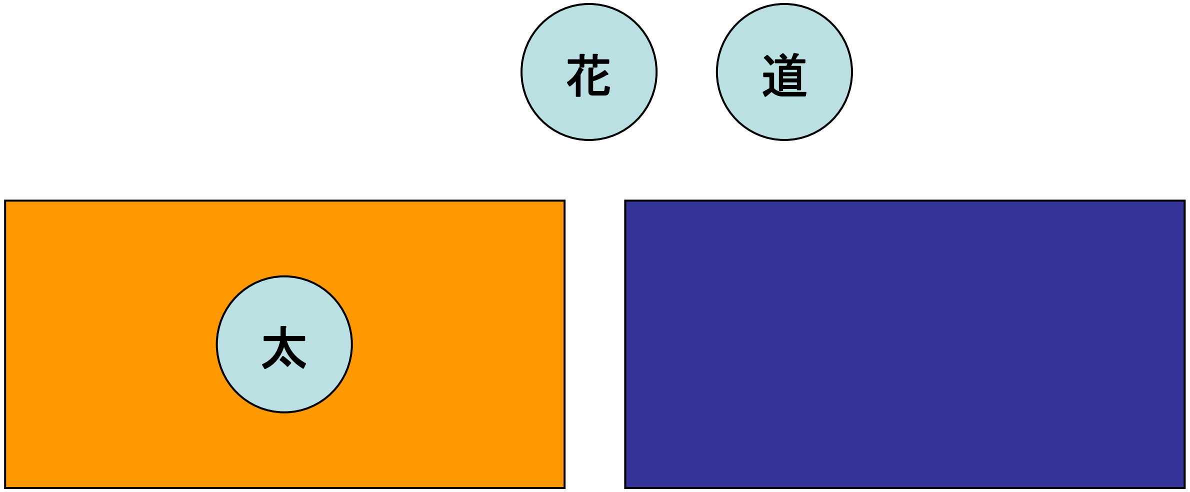
- 以下のようなゲーム的状況を考えよう。
- 太郎と花子と道子が「あるゲーム」に参加して、待合室で彼らの順番を待っている。
- 係員が、彼らを呼び出し、3人をつれて通路を歩いていった。
- 係員が彼らを連れて行った先には、「赤い部屋」と「青い部屋」がある。



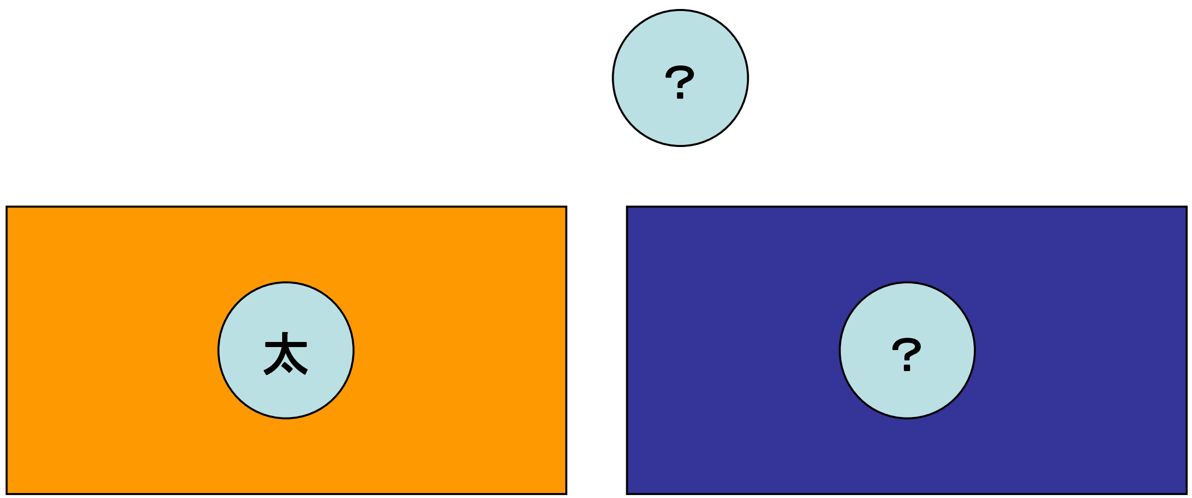
- 係員が、「箱」をもってきて、次のような説明をした。
- 箱の中には、赤い玉と青い玉と白い玉がはいっている。これからあなたたちには順番に箱から玉を一つ取ってもらい、玉の色の部屋に入室してもらう。ただし、白い玉が出たら、そのときは部屋の外で待っていてもらう。



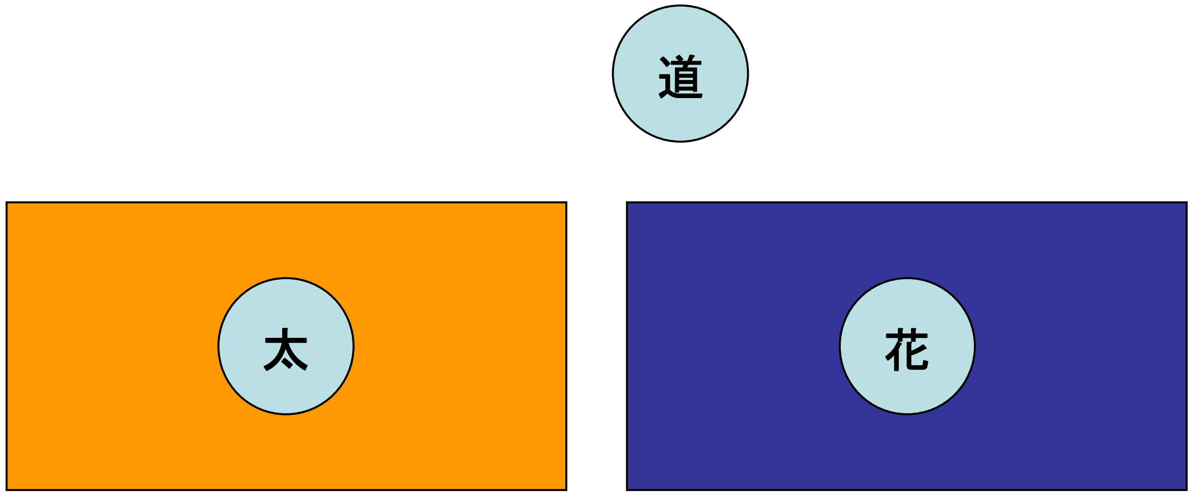
- まず太郎が箱から玉を一つ取り出した。太郎の取った玉は、赤い玉だった。
- ルールどおり、太郎はこの時点で赤い部屋に入室した。



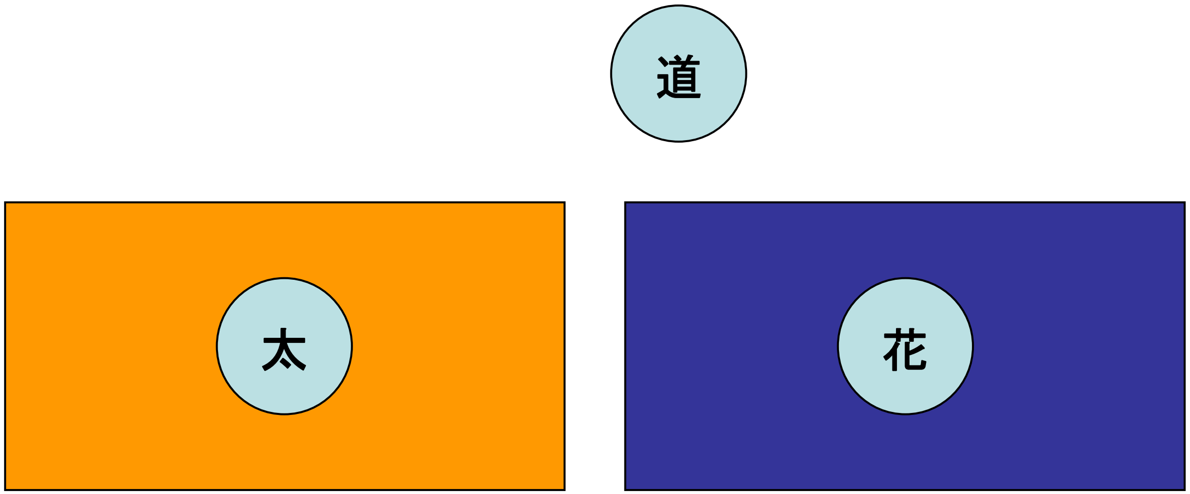
- さて、太郎視点でその後、何がおきたのかをみてみよう。
- 太郎が赤い部屋で入室した後、しばらくして誰かが青い部屋に入室したようだ。しかし、残念ながら、太郎には花子と道子のどちらが青い部屋に入室したのかはわからない。



- では、次に、花子・道子視点で、太郎入室後の話をみてみよう。
- 太郎が赤い部屋で入室したのを確認した後、花子が箱から玉を取り出した。
- 花子の取り出した玉は青色であった。
- ルールどおり、花子は青い部屋へ入室した。
- （仮に、花子が白い玉を取り出していれば、道子が青い部屋に入室することになった。）

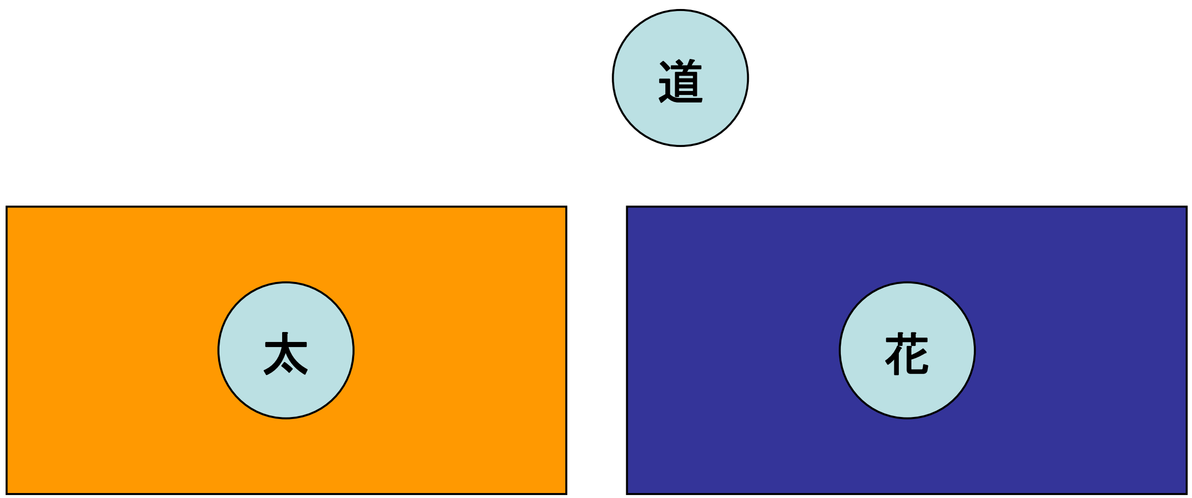


- 花子・道子視点では、青い部屋に誰が入室したのかは明らかである。
- また、花子・道子は赤い部屋に誰がいるかもわかっている。
- しかし、太郎には、青い部屋に誰がいるのかはわからない。
- さらに、花子・道子には、太郎が青い部屋に誰がいるかわからないこと、がわかっている。
- ・・・というような状況である。（当該状況は共有知識である。）

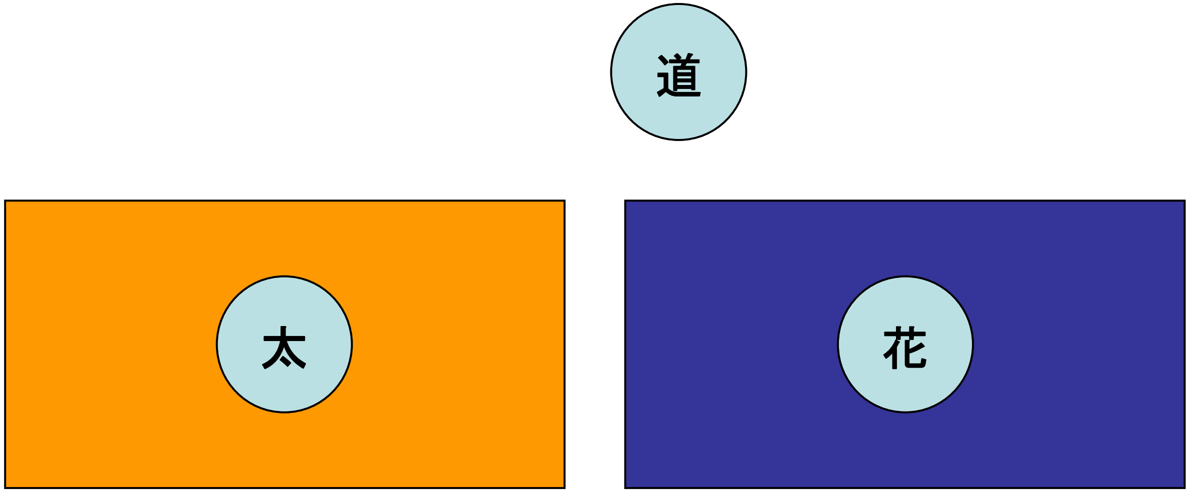


- 話をゲーム理論で分析するために、赤い部屋にいる人を Player R、青い部屋にいる人を Player B とよぶ。
- すると、
  - Player R が誰であるかは Player B にはわかっている。
  - しかし、Player B が誰であるかは、Player R にはわからない。
  - Player R にとっては、Player B は確率 ½ で花子であり、確率 ½ で道子である。
  - しかし、Player B は、ゲーム開始時点で、自分が誰であるかはわかっている。
  - 当該構造は、両者にとって共有知識である。

- さて、話を太郎・花子・道子の状況に戻そう。
- 二人が入室後、全員に聞こえるようにアナウンスがあった。
- アナウンスの内容は以下のとおり。



- 両方の部屋に、赤いボタンと青いボタンがある。
- 入室した二人は、赤いボタンか青いボタンを押してもらう。
- もちろん、入室した二人には意思疎通をする余地は無い。
- ボタンを押した後、何が起きるのかは次のとおり。
  - 二人が青いボタンを押したときには、青い部屋の人においしい食事がだされる。
  - 二人が赤いボタンを押したときには、赤い部屋の人においしい食事がだされる。
  - 二人の押したボタンが異なるときには、両方の部屋に不快な音がながれる。



- 太郎、花子にとって、
- おいしい食事は利得2
- 何も食べれないときは0
- 不快な音は－1の利得である。

		花子 赤	花子 青
太郎	赤	2, 0	-1, -1
太郎	青	-1, -1	0, 2

- しかし、道子はとある事情により食事制限中であり、おいしい食事を目の前に出されることは相当の苦痛となる。よって、道子は
- おいしい食事が -2
- 何も食べれないときは0
- 不快な音は－1

		道子 赤	道子 青
太郎	赤	2, 0	-1, -1
太郎	青	-1, -1	0, -2

- このことは、全員にとって共有知識である。

- もちろん、それぞれのゲームには、Nash均衡が存在しているが、

- 問題は、太郎には、上のゲームを行っているのか、下のゲームを行っているのかがわからない、ということである。

花子

		赤	青
太郎	赤	2, 0	-1, -1
	青	-1, -1	0, 2

道子

		赤	青
太郎	赤	2, 0	-1, -1
	青	-1, -1	0, -2

- 表現を変えると、
- Player R は、Player B のタイプ (花子 or 道子)がわからず、それゆえ、上のゲームと下のゲームのどちらを行っているのかはわからない。
- その一方で、Player B は自分がどっちのタイプ（花子 or 道子）が分かった状態で、ゲームを行っているのである。

Player B
タイプ花子

Player R		赤	青
	赤	$\boxed{2, 0}$	-1, -1
	青	-1, -1	$\boxed{0, 2}$

Player B
タイプ道子

Player R		赤	青
	赤	$\boxed{2, 0}$	-1, -1
	青	-1, -1	0, -2

- では、当該状態を Player R と Player B のゲームとして分析しよう。

- まず各 Player の戦略であるが、
- Player R は
  - 「赤」
  - 「青」。
- Player B は、タイプ毎に行動が選べるので
  - 花子のとき「赤」、道子のとき「赤」
  - 花子のとき「赤」、道子のとき「青」
  - 花子のとき「青」、道子のとき「赤」
  - 花子のとき「青」、道子のとき「青」

  - それぞれ、赤赤、赤青、青赤、青青、と表記する。

Player B
タイプ花子

Player R	赤	青
赤	2, 0	-1, -1
青	-1, -1	0, 2

Player B
タイプ道子

Player R	赤	青
赤	2, 0	-1, -1
青	-1, -1	0, -2

- では、次に、このゲームの「均衡」について考えよう。
- 基本的に Nash 均衡のアイデアに従う。
- しかし、Player B には二つのタイプがあるので、この点にだけ注意が必要。

Player B
タイプ花子

Player R		赤	青
	赤	$\boxed{2, 0}$	-1, -1
	青	-1, -1	$\boxed{0, 2}$

Player B
タイプ道子

Player R		赤	青
	赤	$\boxed{2, 0}$	-1, -1
	青	-1, -1	0, -2

- 均衡では、次のことが成立していなければならない。
- Player R は、上下のゲームで異なる戦略をとることはできない。
- しかし、上下のゲームがそれぞれ確率 1/2 で生じることはわかっている。
- それゆえ、Player R の戦略は、Player B の戦略 (赤赤、赤青、青赤、青々)に対して、期待利得を最大化するという意味での、最適反応になっていなければならない。

Player B
タイプ花子

Player R	赤	青
赤	2, 0	-1, -1
青	-1, -1	0, 2

Player B
タイプ道子

Player R	赤	青
赤	2, 0	-1, -1
青	-1, -1	0, -2

例えば、Player B の「赤青」という戦略に対しては、Player Rの
「赤」は (1/2) * 2 + (1/2) * (-1) = 1/2
「青」は (1/2) * (-1) + (1/2) * 0 = - 1/2

よって、赤が最適反応

- その一方で、Player B は、自分のタイプが何か分かっているので、Player R の戦略に対して、タイプごとに最適反応をしていなければならない。

- つまり、花子は花子で、道子は道子で、それぞれ太郎の戦略に対して最適反応をしていなければいけない。

Player B
タイプ花子

Player R		赤	青
	赤	2, 0	-1, -1
	青	-1, -1	0, 2

例えば、Player R の「赤」という戦略に対しては、

Player B のタイプ花子の最適反応は「赤」
Player B のタイプ道子の最適反応は「赤」

となる。

Player B
タイプ道子

Player R		赤	青
	赤	2, 0	-1, -1
	青	-1, -1	0, -2

- まとめると、ここで考える均衡概念では、
- Player R は Player B の戦略に対して最適反応をしている必要があり、
- さらに、Player B の各タイプが、Player R の戦略に対して最適反応をしている必要がある、
- この後者の、タイプ毎の最適反応、という点が新しいポイントとなる。
- このような均衡概念を、ベイジアン・ナッシュ均衡という。

- ベイジアンナッシュ均衡を求めるために、以下のような、Player R が想定するゲームを考えよう。

Player B タイプ花子

Player R	赤	青
赤	2, 0	-1, -1
青	-1, -1	0, 2

Player B タイプ道子

Player R	赤	青
赤	2, 0	-1, -1
青	-1, -1	0, -2

	赤赤	赤青	青赤	青青
赤	2, (0, 0)	0.5, (0, -1)	0.5, (-1, 0)	-1, (-1, -1)
青	-1, (-1, -1)	-0.5, (-1, -2)	-0.5, (2, -1)	0, (2, -2)

Player R の期待利得

Player B タイプ花子の利得

Player B タイプ道子の利得

① まず、Player R の最適反応をチェックしていく。

	赤赤	赤青	青赤	青青
赤	2, (0, 0)	0.5, (0, -1)	0.5, (-1, 0)	-1, (-1, -1)
青	-1, (-1, -1)	-0.5, (-1, -2)	-0.5, (2, -1)	0, (2, -2)

最適反応

① まず、Player R の最適反応をチェックしていく。
② Player B タイプ花子の最適反応をチェックしていく。

	赤赤	赤青	青赤	青青
赤	2, (0, 0)	0.5, (0, -1)	0.5, (-1, 0)	-1, (-1, -1)
青	-1, (-1, -1)	-0.5, (-1, -2)	-0.5, (2, -1)	0, (2, -2)

最適反応

① まず、Player R の最適反応をチェックしていく。
② Player B タイプ花子の最適反応をチェックしていく。
③ Player B タイプ道子の最適反応をチェックしていく。

	赤赤	赤青	青赤	青青
赤	2, (0, 0)	0.5, (0, -1)	0.5, (-1, 0)	-1, (-1, -1)
青	-1, (-1, -1)	-0.5, (-1, -2)	-0.5, (2, -1)	0, (2, -2)

■ 最適反応

① まず、Player R の最適反応をチェックしていく。
② Player B タイプ花子の最適反応をチェックしていく。
③ Player B タイプ道子の最適反応をチェックしていく。
④ 全員（と全タイプ）が最適反応となっているところがベイジアンナッシュ均衡

	赤赤	赤青	青赤	青青
赤	2, (0, 0)	0.5, (0, -1)	0.5, (-1, 0)	-1, (-1, -1)
青	-1, (-1, -1)	-0.5, (-1, -2)	-0.5, (2, -1)	0, (2, -2)

最適反応

ベイジアンナッシュ均衡は（赤、赤赤）

- ベイジアンナッシュ均衡(赤、赤赤)について考察してみよう。

	赤赤	赤青	青赤	青青
赤	2, (0, 0)	0.5, (0, -1)	0.5, (-1, 0)	-1, (-1, -1)
青	-1, (-1, -1)	-0.5, (-1, -2)	-0.5, (2, -1)	0, (2, -2)

- これは、均衡では、太郎は「赤」を選択し、花子も道子も、もし選ばれたなら、「赤」を選択する、ということである。

Player B
タイプ花子

Player R	赤	青
赤	2, 0	-1, -1
青	-1, -1	0, 2

- これは、最初のお話において、実際に選択されていた花子が、赤を選択する、という結果に合理的に到達できるはずであることを意味している。

Player B
タイプ道子

Player R	赤	青
赤	2, 0	-1, -1
青	-1, -1	0, -2

- この結果は少々不思議である。
- なぜなら、このゲームを見ればわかるように、太郎と花子が不確実性の存在しない状態でゲームを行ったときには、ナッシュ均衡が複数あるからである。
- なぜ、不確実性が存在すると、花子が青を選択するような状態が均衡にならなくなるのであろうか？

	赤赤	赤青	青赤	青青
赤	2, (0, 0)	0.5, (0, -1)	0.5, (-1, 0)	-1, (-1, -1)
青	-1, (-1, -1)	-0.5, (-1, -2)	-0.5, (2, -1)	0, (2, -2)

Player B
タイプ花子

Player R	赤	青
赤	2, 0	-1, -1
青	-1, -1	0, 2

Player B
タイプ道子

Player R	赤	青
赤	2, 0	-1, -1
青	-1, -1	0, -2

- この点を理解するには、青い部屋に実際に入室した花子にとっては少々奇妙に思えるかもしれないが、仮に道子が入室した際に彼女がとった選択と、それを考慮した太郎の選択について考えなければいけない。

- このゲームをみればわかるとおり、道子にとっては、常に赤が支配戦略である。つまり、道子が入室すれば、彼女は確実に赤をとると考えられる。

Player B
タイプ花子

		赤	青
Player R	赤	2, 0	-1, -1
	青	-1, -1	0, 2

- 上のことを予見した太郎の選択を考えよう。太郎は実際に花子が入室したことを知らないのだから、それぞれが1/2の確率で入室すると考えている。

Player B
タイプ道子

		赤	青
Player R	赤	2, 0	-1, -1
	青	-1, -1	0, -2

- 花子が赤を選択しているときの太郎のそれぞれの戦略が導く期待利得は、

赤　0.5 ×2 + 0.5 ×2 = 2

青　0.5 ×(-1) + 0.5 ×(-1) = -1

- 花子が青を選択しているときの太郎のそれぞれの戦略が導く期待利得は、

赤　0.5 ×(-1) + 0.5 ×2 = 0.5

青　0.5 ×0 + 0.5 ×(-1) = -0.5

つまり、花子の戦略に関わらず、太郎は赤を取る。

Player B タイプ花子

Player R		赤	青
	赤	2, 0	-1, -1
	青	-1, -1	0, 2

Player B タイプ道子

Player R		赤	青
	赤	2, 0	-1, -1
	青	-1, -1	0, -2

- 太郎が赤をとることがわかれば、花子は赤をとるのが最適反応である。
- このようにして、花子は赤をとるという選択に至ることが可能である。
- このような花子の思考は、太郎にとっては、Player B が花子か道子かどちらであるかわからない、という不確実性が存在するがゆえに可能となるのである。

Player B
タイプ花子

Player R		赤	青
	赤	2, 0	-1, -1
	青	-1, -1	0, 2

Player B
タイプ道子

Player R		赤	青
	赤	2, 0	-1, -1
	青	-1, -1	0, -2

- ここまでのまとめ

- このようにして、相手のタイプ（利得関数）に対して不確実性が存在するような状況を分析することが可能となる。

- 均衡概念は、ベイジアンナッシュ均衡とよばれる。
  - すべてのプレイヤーとすべてのプレイヤーのタイプが最適反応をしている状態である。

練習問題

- 以下の例は、武藤滋夫「ゲーム理論入門」p120~ を参考にしている。
- 今、類似商品を販売している企業Aと企業Bが価格を引き下げるか否かを検討している。
- 価格引下げの効果には不確実性があり、
  - 価格引下げにより、相手よりも売り上げが伸びるケース
  - 価格引下げにより、ブランドイメージの悪化のために、相手よりも売り上げが減少するケース
- の二つの可能性がある。

- ケース1：価格引下げにより、相手よりも売り上げが伸びる

企業B

企業A	維持	引き下げ
維持	4, 4	1, 6
引き下げ	6, 1	2, 2

- ケース2：価格引下げにより、相手よりも売り上げが減少する

企業B

企業A	維持	引き下げ
維持	4, 4	6, 1
引き下げ	1, 6	2, 2

- 今、企業Bは、市場調査により、実際の市場がケース1なのかケース2なのかがわかった。

- その一方で、企業Aは、企業Bが市場調査を行ったことは知っているが、調査結果はわからない。

- 企業Aは、ケース1とケース2の確率をそれぞれ 1/2 と見積もっている。

- ケース１であることを知った企業Bのことをタイプ１、ケース２であることを知った企業Bのことをタイプ２、とすることにより、当該状況のベイジアンナッシュ均衡を求めてみよう。

企業B
タイプ1

		維持	引き下げ
企業A	維持	4, 4	1, 6
	引き下げ	6, 1	2, 2

	維維	維引	引維	引引
維	4, (4, 4)	5, (4, 1)	2.5, (6, 4)	3.5, (6, 1)
引	3.5, (1, 6)	4, (1, 2)	1.5, (2, 6)	2, (2, 2)

企業B
タイプ2

		維持	引き下げ
企業A	維持	4, 4	6, 1
	引き下げ	1, 6	2, 2

① 企業Aの最適反応をチェックしていく。

		企業B			
		維維	維引	引維	引引
企業A	維	$\boxed{4}$, (4, 4)	$\boxed{5}$, (4, 1)	$\boxed{2.5}$, (6, 4)	$\boxed{3.5}$, (6, 1)
	引	3.5, (1, 6)	4, (1, 2)	1.5, (2, 6)	2, (2, 2)

① 企業Aの最適反応をチェックしていく。
② 企業Bタイプ1の最適反応をチェックしていく。

		企業B			
		維維	維引	引維	引引
企業A	維	4, (4, 4)	5, (4, 1)	2.5, (6, 4)	3.5, (6, 1)
	引	3.5, (1, 6)	4, (1, 2)	1.5, (2, 6)	2, (2, 2)

① 企業Aの最適反応をチェックしていく。
② 企業Bタイプ1の最適反応をチェックしていく。
③ 企業Bタイプ2の最適反応をチェックしていく。

		企業B			
		維維	維引	引維	引引
企業A	維	$\boxed{4}$, (4, $\boxed{4}$)	$\boxed{5}$, (4, 1)	$\boxed{2.5}$, ($\boxed{6,}$ $\boxed{4}$)	$\boxed{3.5}$, ($\boxed{6,}$ 1)
	引	3.5, (1, $\boxed{6}$)	4, (1, 2)	1.5, ($\boxed{2,}$ $\boxed{6}$)	2, ($\boxed{2,}$ 2)

① 企業Aの最適反応をチェックしていく。

② 企業Bタイプ1の最適反応をチェックしていく。

③ 企業Bタイプ2の最適反応をチェックしていく。

④ 全員（と全タイプ）が最適反応となっているところが
ベイジアンナッシュ均衡

ベイジアンナッシュ均衡は
（維、引維）

企業A ＼ 企業B	維維	維引	引維	引引
維	4, (4, 4)	5, (4, 1)	2.5, (6, 4)	3.5, (6, 1)
引	3.5, (1, 6)	4, (1, 2)	1.5, (2, 6)	2, (2, 2)