ゲーム論Ｉ 第十一回

上條　良夫

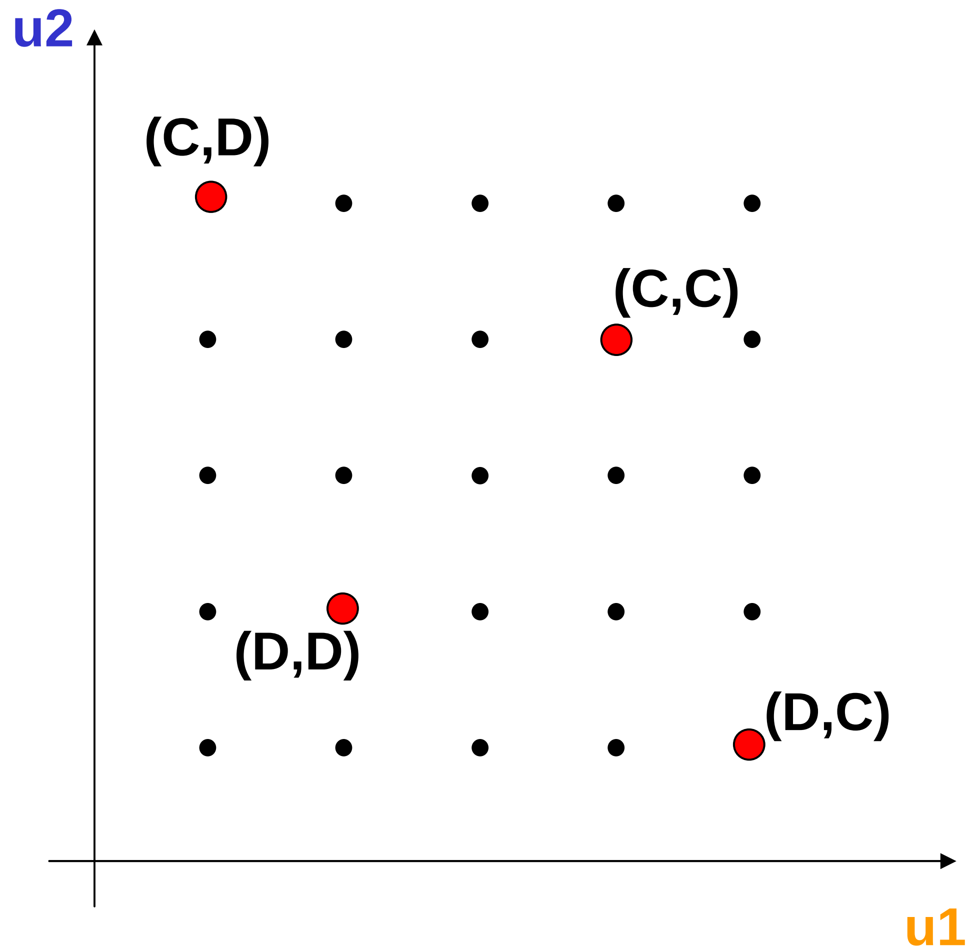
講義のキーワード

- 囚人のジレンマゲームとフォーク定理について

フォーク定理

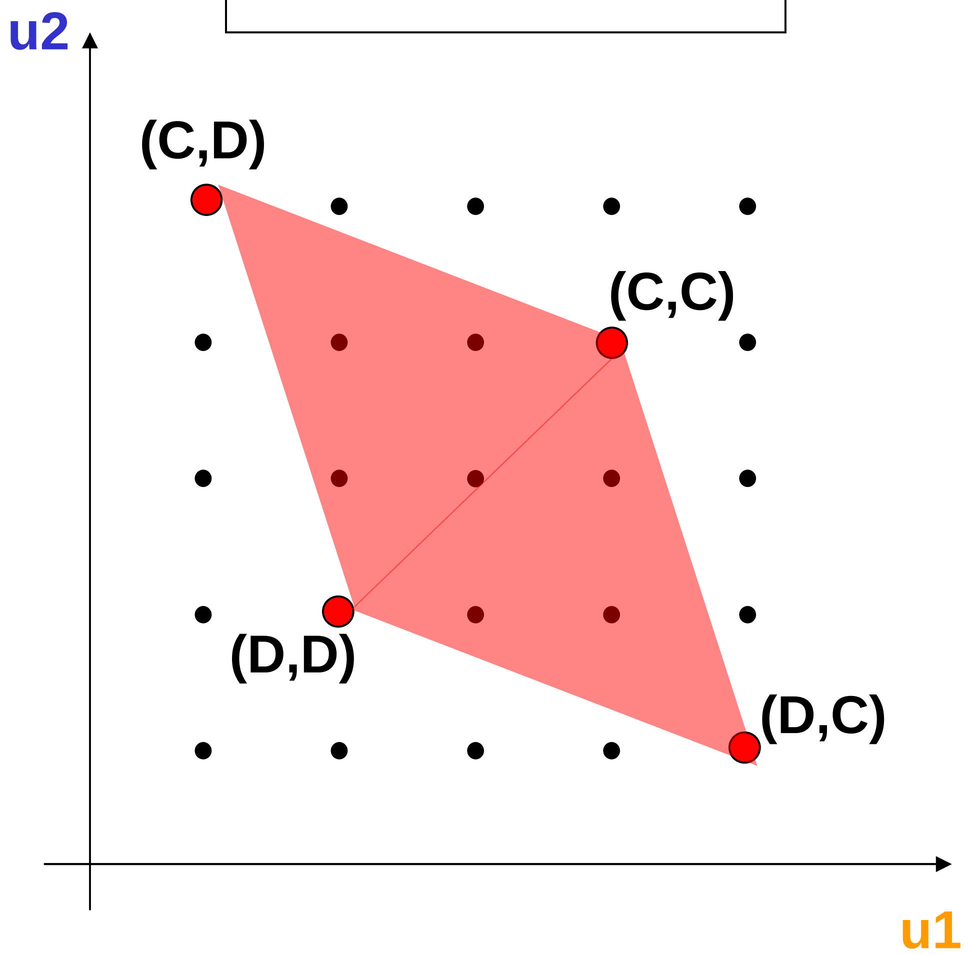
- フォーク定理・・・いろんなバージョンが研究されているが、囚人のジレンマゲームでは
  - 囚人のジレンマゲームの無限回繰り返しゲームでは、割引因子δが1に十分に近ければ、平均して(D,D)以上の利得を達成するような部分ゲーム完全均衡が存在する。

	C	D
C	4, 4	1, 5
D	5, 1	2, 2



	C	D
C	4, 4	1, 5
D	5, 1	2, 2

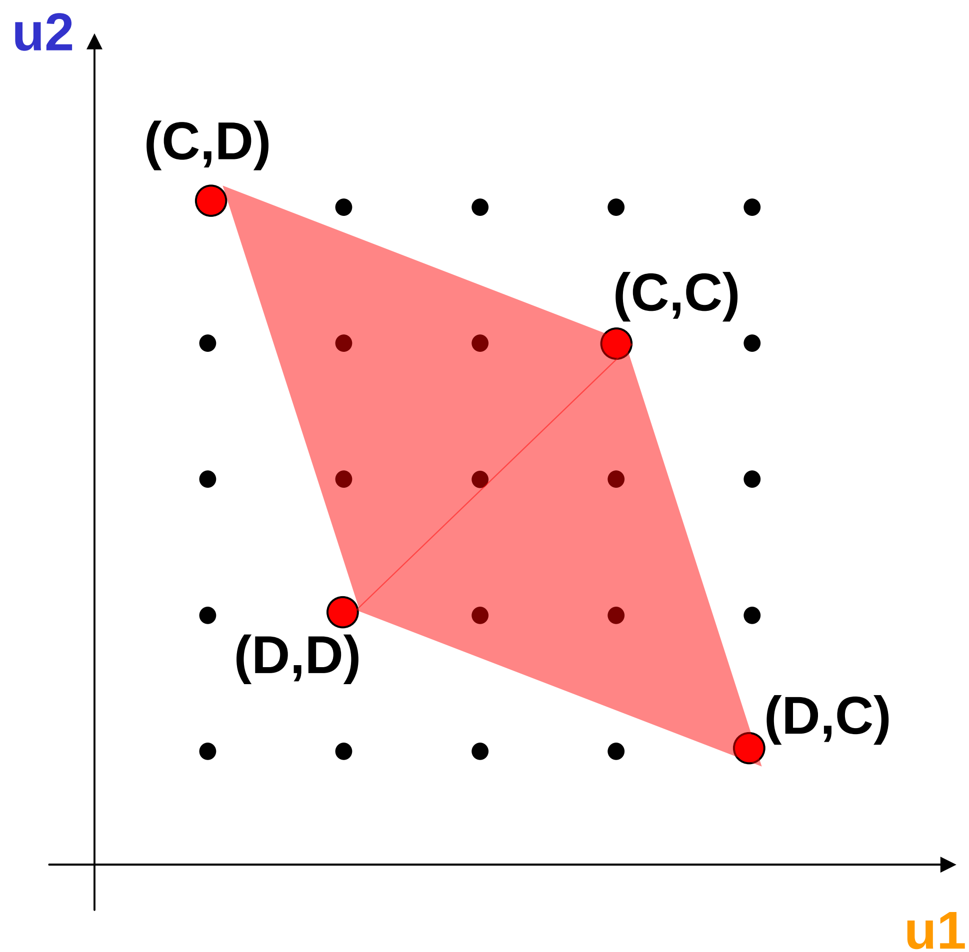
実現可能な利得の集合



- パレート最適（効率）

- ある状態がパレート最適であるとは、その状態から、ある人の利得を改善しようとすると、他の人の利得が悪化するようなときである。

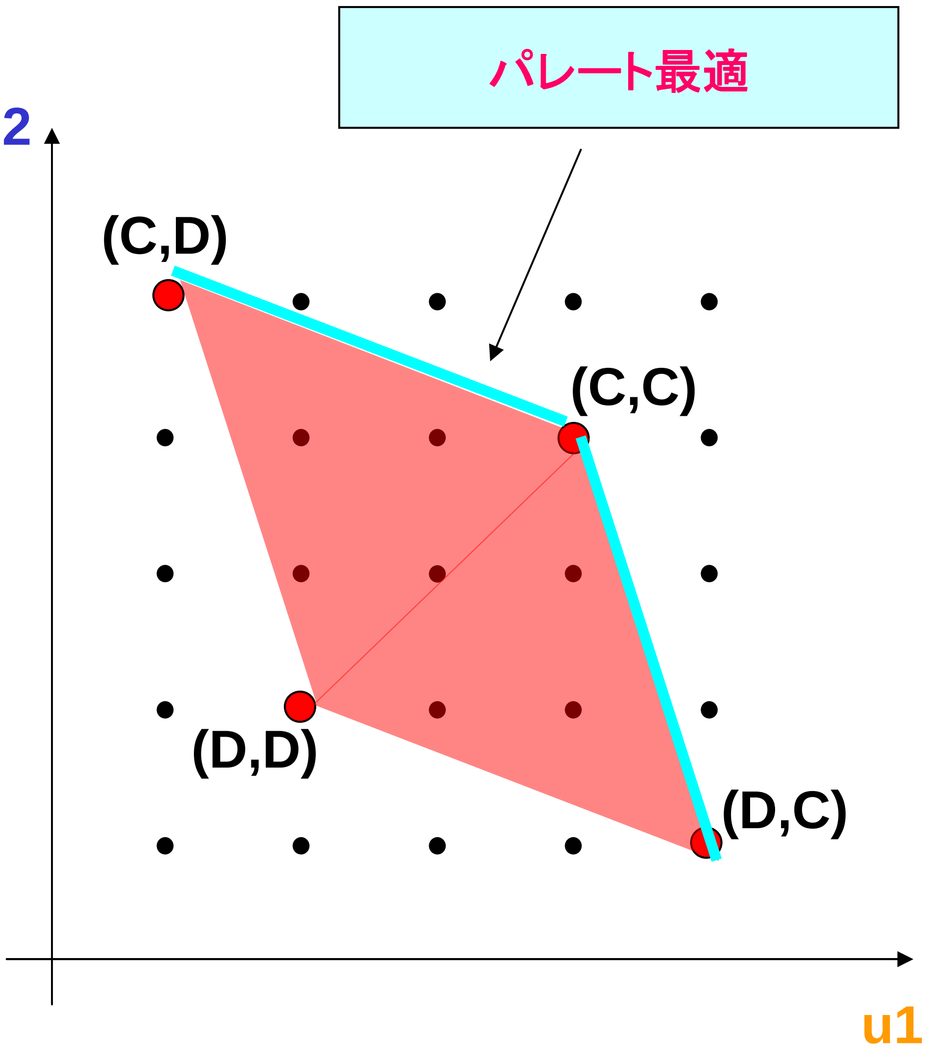
- つまり、パレート最適状態からは、全員がそれよりよくなるようなことはできない。



- パレート最適(効率)

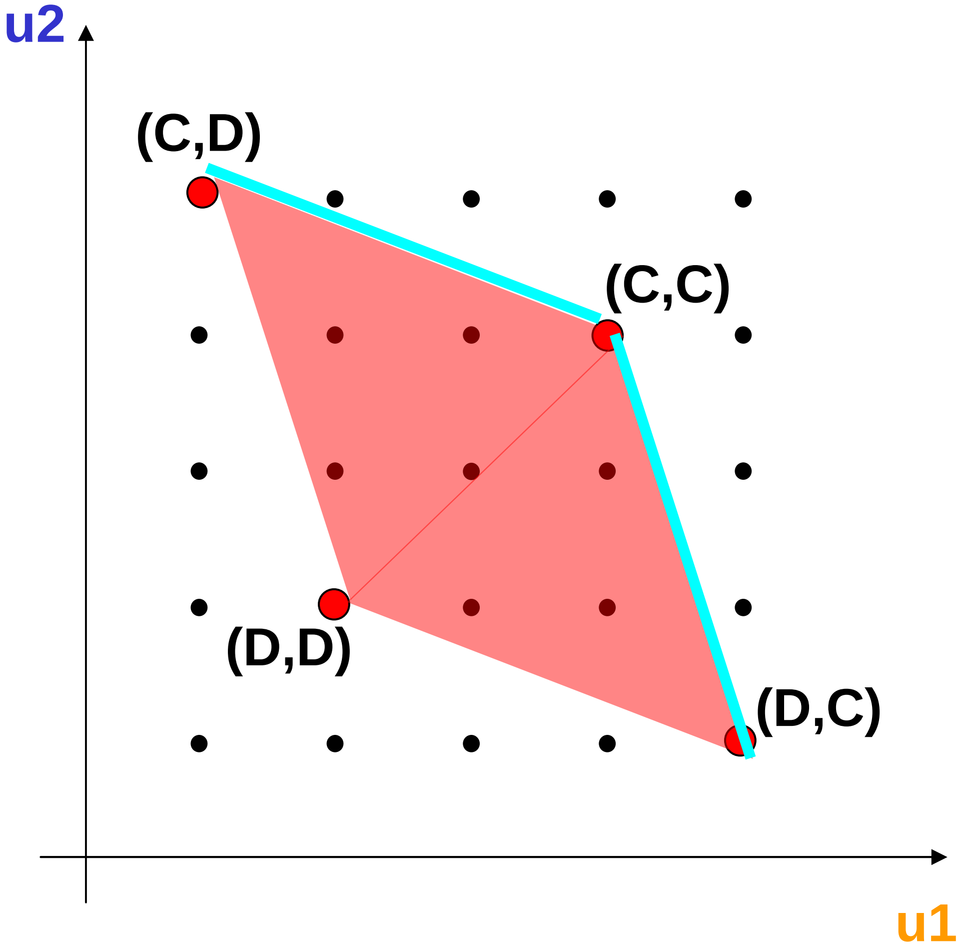
- ある状態がパレート最適であるとは、その状態から、ある人の利得を改善しようとすると、他の人の利得が悪化するようなときである。

- つまり、パレート最適状態からは、全員がそれよりよくなるようなことはできない。



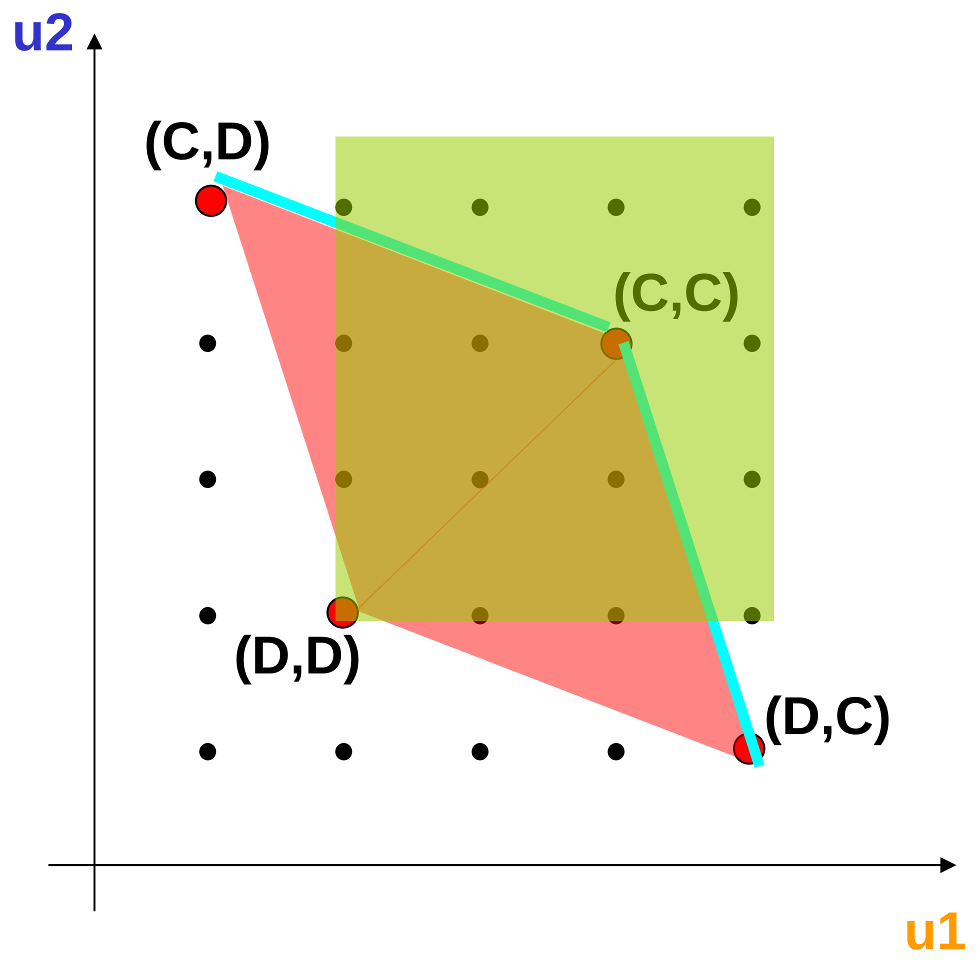
- フォーク定理

- 囚人のジレンマゲームの無限回繰り返しゲームでは、割引因子δが1に十分に近ければ、平均して(D,D)以上の利得を達成するような部分ゲーム完全均衡が存在する。



- フォーク定理

- 囚人のジレンマゲームの無限回繰り返しゲームでは、割引因子δが1に十分に近ければ、平均して(D,D)以上の利得を達成するような部分ゲーム完全均衡が存在する。



- 無限回繰り返しゲームの注意点
  - 囚人のジレンマゲームの無限回繰り返しゲームの部分ゲーム完全均衡には、確かに、（割引因子が適当な範囲にあれば）、常に (C,C) が達成され続けるようなものも存在しているが、他にも多様な部分ゲーム完全均衡が存在している。
  - 例えば、
    - 常に (D, D) が達成されるような部分ゲーム完全均衡
    - (C,D) と (D,C) が交互に達成されるような部分ゲーム完全均衡
  - などが存在する。

- 無限回繰り返しゲームでの利得のとらえ方として、平均利得を考えよう。
- 毎期 a を獲得したときの、利得の割引現在価値は、

$$a + a\delta + a\delta^2 + a\delta^3 + \ldots = \frac{a}{1-\delta}$$

- これが平均して利得 a を達成していると考えられるので、
- 平均利得 ＝ (1-δ) ×(利得の割引現在価値)

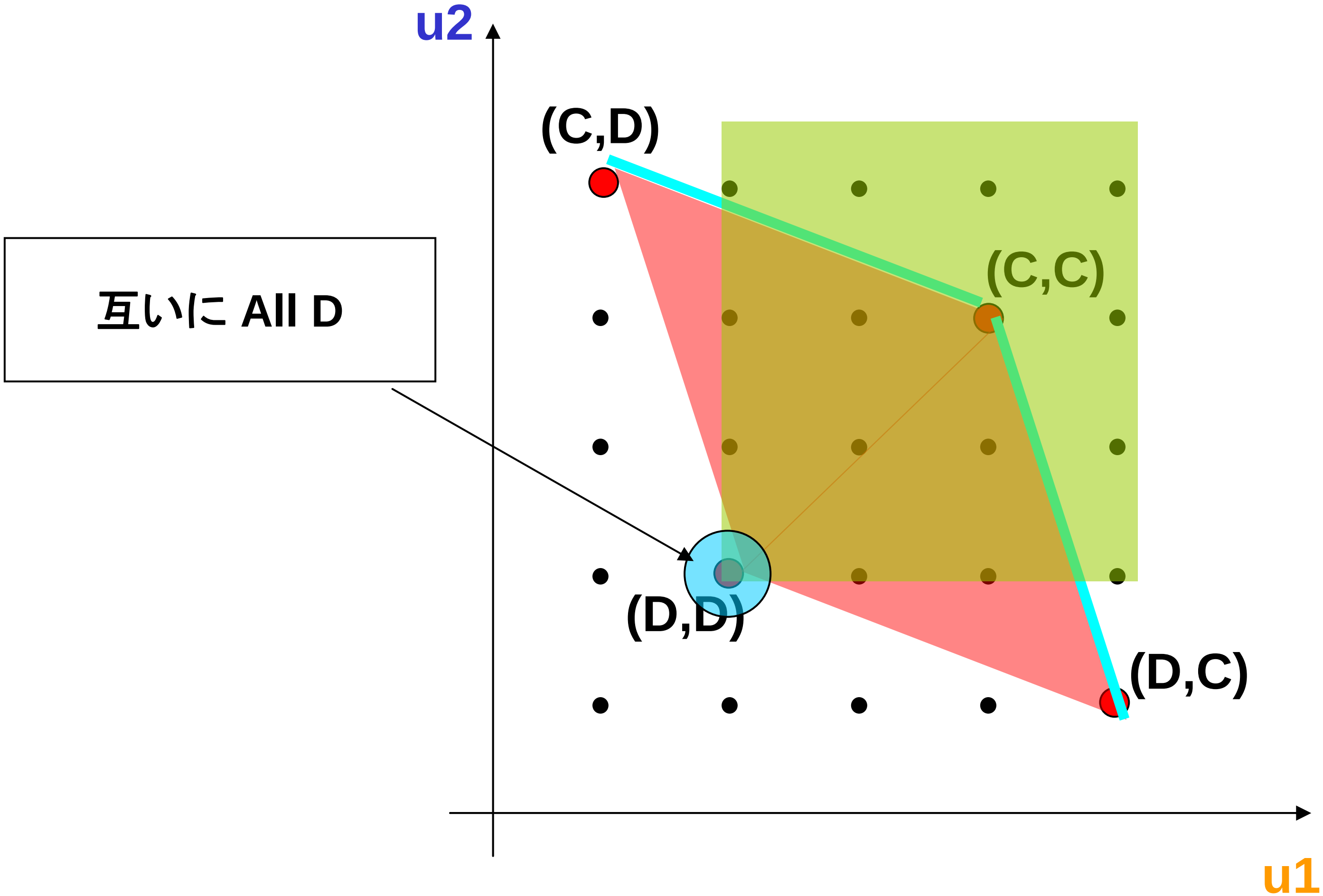
- 常に (D,D)が実現されるような部分ゲーム完全均衡

- 互いに All D を取り合っている状態を考えればよい。

- 相手が All D をとっているときには、どんな部分ゲームにおいても、自分は常に D をとり続けることが最適反応である（つまり、All D に従うことが最適反応）。

- よって、互いに All D を取り合う状態は部分ゲーム完全均衡である。このときの両者の平均利得は

$$(1-\delta)(2+2\delta+2\delta^2+2\delta^3+\ldots)=(1-\delta)\frac{2}{1-\delta}=2$$


互いに All D
u2
(C,D)
(C,C)
(D,D)
(D,C)
u1

- (C,D), (D,C) が交互に実現されるような部分ゲーム完全均衡

- プレイヤー1が Trigger 1 戦略、プレイヤー2がTrigger 2 戦略をとっているような状況を考える。

- Trigger 1 戦略
  - 過去の行動の組が, (C,D), (D,C) を交互にとることと矛盾がなければ、奇数回にはC, 偶数回には D をとる。
  - 過去の行動の組が, (C,D), (D,C) を交互にとることと矛盾していれば、D をとる。
- Trigger 2 戦略
  - 過去の行動の組が, (C,D), (D,C) を交互にとることと矛盾がなければ、奇数回にはD, 偶数回には C をとる。
  - 過去の行動の組が, (C,D), (D,C) を交互にとることと矛盾していれば、D をとる。

- 前回の常に (C,C) をとることが部分ゲーム完全均衡となることの証明と同じようにすれば、Trigger 1, Trigger 2 を互いに取り合っている状態が部分ゲーム完全均衡になるようなδの範囲が存在することは、証明することが可能である。

- では、δの範囲がどのようになるのかだけ求めてみよう。

1回目		2回目		3回目				奇数回		偶数回		
(C,D)	→	(D,C)	→	(C,D)	→	…	→	(C,D)	→	(D,C)	→	…

- プレイヤー1とプレイヤー2は異なる戦略をとっているが、
  - プレイヤー1が奇数回にTrigger1 戦略から逸脱する誘引を持つかどうかは、プレイヤー2が偶数回にTrigger2戦略から逸脱する誘引を持つかどうかと同じ(割引因子が二人に共通なので)
  - プレイヤー1が偶数回にTrigger1 戦略から逸脱する誘引を持つかどうかは、プレイヤー2が奇数回にTrigger2戦略から逸脱する誘引を持つかどうかと同じ(割引因子が二人に共通なので)

- 逸脱する誘引は、自分が不利な回のほうが強いはず。つまり、プレイヤー1にとっては (D,C) が予定されている回よりも、(C,D) が予定されている回のほうが逸脱する誘引は大きい。

- 逆にプレイヤーは、(C,D) が予定されている回よりも、(D,C) が予定されている回のほうが逸脱する誘引は大きい。

- なので、プレイヤー1が (C,D) を取ることが予定されている回（奇数回）において、逸脱する誘引が存在しないような δ の範囲を求めれば、それで十分。

- では、そのような δ の範囲を求めてみよう。

- 奇数回に、プレイヤー1が行動を C ではなく、Dにすると、そのときの利得の割引現在価値は、

$$2+2\delta+2\delta^2+2\delta^3+\ldots=\frac{2}{1-\delta}$$

- その一方で、Trigger1戦略に従うと、利得の割引現在価値は

$$1+5\delta+\delta^2+5\delta^3+\delta^4\ldots=(1+\delta^2+\delta^4+\ldots)+(5\delta+5\delta^3+5\delta^5\ldots)$$

$$\frac{1}{1-\delta^2}+\frac{5\delta}{1-\delta^2}$$

- よって、逸脱の誘引が存在しないためには、

$$\frac{1}{1-\delta^2}+\frac{5\delta}{1-\delta^2}\geq\frac{2}{1-\delta}$$

$$\Leftrightarrow 1+5\delta\geq 2(1+\delta)\Leftrightarrow \delta\geq\frac{1}{3}$$

- よって、δ＞＝1/3 で、部分ゲーム完全均衡となる。

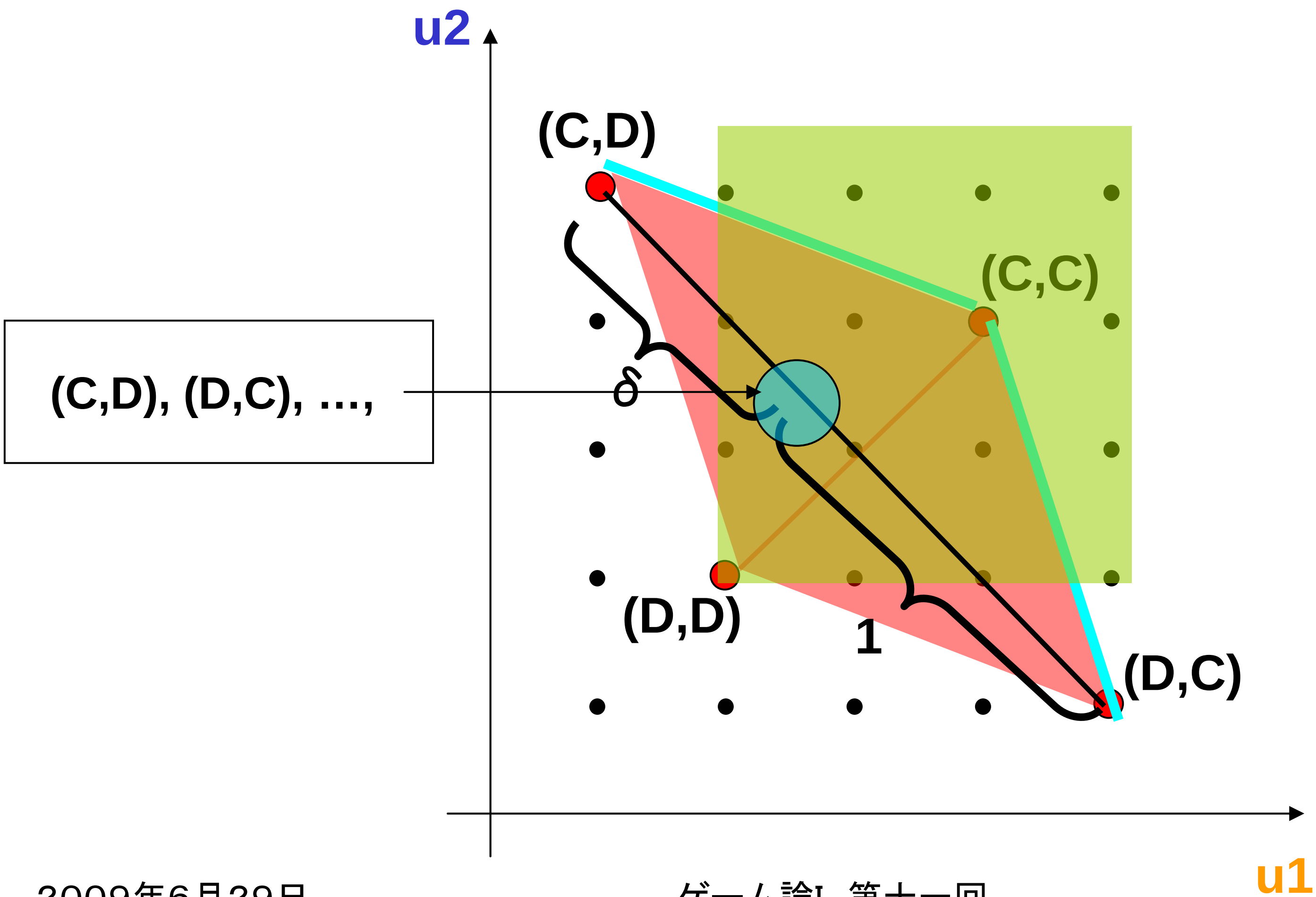
- このときの平均利得は

プレイヤー1 $$(1-\delta)\left(\frac{1}{1-\delta^2}+\frac{5\delta}{1-\delta^2}\right)=\frac{1}{1+\delta}+\frac{5\delta}{1+\delta}$$

プレイヤー2 $$(1-\delta)\left(\frac{\delta}{1-\delta^2}+\frac{5\delta}{1-\delta^2}\right)=\frac{\delta}{1+\delta}+\frac{5}{1+\delta}$$

$$\begin{pmatrix} Payoff\_of\_Player1 \\ Payoff\_of\_Player2 \end{pmatrix}=\frac{1}{1+\delta}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}+\frac{\delta}{1+\delta}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Payoff\_of\_Player1 \\ Payoff\_of\_Player2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+\delta}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} + \frac{\delta}{1+\delta}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$$



まとめ

- 以上のように、無限回繰り返しゲームには部分ゲーム完全均衡が無数にある。
- その中には、パレート最適な状態(やそれに近い場所)を達成するものもあれば、パレート最適から遠く離れた非効率な状態を達成しているものもある。
- 無限回繰り返しゲームの理論からだけでは、どれが実現しそうであるかは、何も語れない。